Technológiai folyamatmodellezés

Technológiai folyamatmodellezés (VIETM241) c. tárgy jegyzet

Szerkesztők: Dr. Illés Balázs és Dr. Sinkovics Bálint

BME VIK ETT

2014

Tartalom:

1. Bevezetés 3
2. A modellezés és szimuláció alapjai 6
3. Fizikai alapok 20
3.1 Hőterjedés és diffúzió 20
3.2. Mechanika és termo-mechanika 36
3.3. Folyadékok áramlása 51
3.3.1 Áramlástani alapok 51
3.3.2 Turbulens áramlási problémák és a CFD módszer 62
3.3.3 Áramlástani hűtési megoldások 71
3.4. Áramkörök modellezése 82
3.5. Elektromágneses modellezés 95
3.6 Megbízhatósági modellezés 108
4. Matematikai alapok 126
4.1. Lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldása 126
4.2. Nem lineáris egyenletek numerikus megoldása 135
4.3. Numerikus deriválás 142
4.4. Numerikus integrálás 152
4.5. Differenciál egyenletek megoldása véges differencia módszerrel 161
4.6. Differenciál egyenletek megoldása integrális módszerekkel 176
4.6.1. Véges elem módszer (FEM) 178
4.6.2. Véges térfogat módszer (FVM) 183
4.7. Példák 186
5. Ajánlott irodalom 202

1. Bevezetés

Az elmúlt évszázad végén rohamos fejlődésnek indult számítástechnika, és ezen belül is az asztali számítógépeink robbanásszerű számítási kapacitás-növekedése lehetővé teszi, hogy ma már akár az otthonainkban is képesek legyünk olyan összetett numerikus számítások elvégzésére, amelyekre korábban csak az erre a célra fejlesztett célhardverek voltak képesek. Emiatt az elmúlt évtizedben a műszaki tudományok területén jelentősen megnőtt az ún. „numerikus szimuláció" szerepe, (emellett persze találunk nem műszaki alkalmazásra is számos példát, de azok nem képezik jelen témánk szerves részét).

Numerikus szimuláció alatt a továbbiakban a fizikai jelenségeket leíró differenciál egyenletrendszerek numerikus közelítő megoldását értjük. A teljesség igénye nélkül néhány lényeges alkalmazás:

- termodinamikai rendszerek vizsgálata,
- áramlástani problémák vizsgálata,
- mechanikai és termo-mechanikai problémák elemzése,
- elektromágneses számítások,
- villamos hálózatanalízis,
- élettartam modellek és megbízhatósági vizsgálatok.

A fent felsorolt problémák szinte mindegyikére igaz, hogy az őket leíró differenciálegyenlet rendszerek analitikus megoldása általában nem létezik, vagy ha esetleg mégis előállítható (szinte kizárólag csak a legegyszerűbb esetekben), akkor az előállítás és megoldás nehézkes, mivel olyan mély matematikai ismereteket igényel, amelyek egy mérnöktől nem várhatók el.

Ezzel szemben az említett differenciálegyenlet rendszerek numerikus közelítő megoldása általában könnyedén előállítható és megoldható, azonban a numerikus megoldás esetén is merülnek fel problémák:

1. Mennyire jó a közelítés, amit alkalmaztunk, azaz mennyire felel meg a kapott eredmény a valóságnak?
2. Elvárt időn belül eredményre jutunk-e, azaz mennyi időt és energiát (számítási kapacitást) kell fektetünk az eredmény elérésébe?

3. A fenti két kérdés hogyan függ egymástól, azaz ha több időt és energiát szánunk egy probléma megoldására, akkor vajon milyen mértékben „javul” a megoldásunk?

A tématerület „szépségéhez” tartozik, hogy a fent definiált kérdések nem mindegyikére adható egyértelmű válasz, vagy legalább is csak jól körülhatárolt peremfeltételek mellett.

A numerikus szimulációkra általános feltételek mellett elmondható, hogy a közelítés hibájának számítása implicit marad, így a számított eredmény csak kísérleti úton ellenőrizhető. Mivel a numerikus számítások a legnagyobb mértékben memória és központi aritmetikai egység függőek, így a 2. pontban megfogalmazott kérdésre könnyebb választ adni, de meg kell jegyezni, hogy itt is jelentős eltérések lehetnek az alkalmazott szimulációs szoftverek és akár az operációs rendszerek között is.

A numerikus szimulációk leggyakrabban felmerülő kérdése (és egyben a téma aktívan kutatott területe), hogy vajon érdemes-e a modellünk komplexitását (és ezzel a számítási időt) növelni, hogy a számított eredmény pontosabb legyen? Milyen a komplexitást nem, vagy csak csekély mértékben növelő módszerek léteznek a jobb eredmény elérése érdekében?

A fent tárgyalt problémákkal ma már az „átlag felhasználók” nem is feltétlenül találkoznak, mivel olyan magas szintű szimulációs szoftver rendszerek állnak a rendelkezésünkre, amelyek a fenti terheket részben vagy egészben leveszik a felhasználó válláról. A terület mai trendje a legrövidebben így foglalható össze: „olyan intelligens szoftvercsomagokat kell előállítani, amelyek a numerikus szimulációk mélyebb ismerete nélkül is képessé tesznek minél több felhasználót megfelelő eredmények gyors és egyszerű elérésére”. A dolog mögött egyébként nem titkolt gazdasági érdekek is húzódnak.

Ezzel szemben a *Technológiai Folyamatmodellezés* c. tárgy célja olyan gyakorlatban használható tudás átadása a hallgatóknak, amely az előző bekezdésben tárgyaltakon túlmutat, és megfelelő bázist képez az elektronikai technológiában leggyakrabban előforduló fizikai, kémiai, fizikai-

kémiai, elektrokémiai jelenségek modellezésének és szimulációjának területén. Ezen kívül megismerteti a hallgatókkal a modellezés és szimuláció matematikai alapjait, történetét és kapcsolatát a természetes emberi gondolkodással, ezáltal fejlesztve a modellalkotási és elvonatkoztatási képességet. Az elektronikai iparból vett szemléltető példák segítségével bemutatja a különböző természeti jelenségek megjelenését a különféle technológiákban, ezáltal a korábban elsajátított elméleti tudás jobb megértését és elmélyítését teszi lehetővé. Valós modellezési problémák tárgyalásán keresztül fejleszti a hallgatók probléma-megoldási készségét. A hallgatók ezen keresztül elsajátítják az elektronikai gyártásban előforduló problémák megoldását és kezelését.

A tantárgyat teljesítő hallgatók az alábbi területen szereznek tudást és jártasságot:

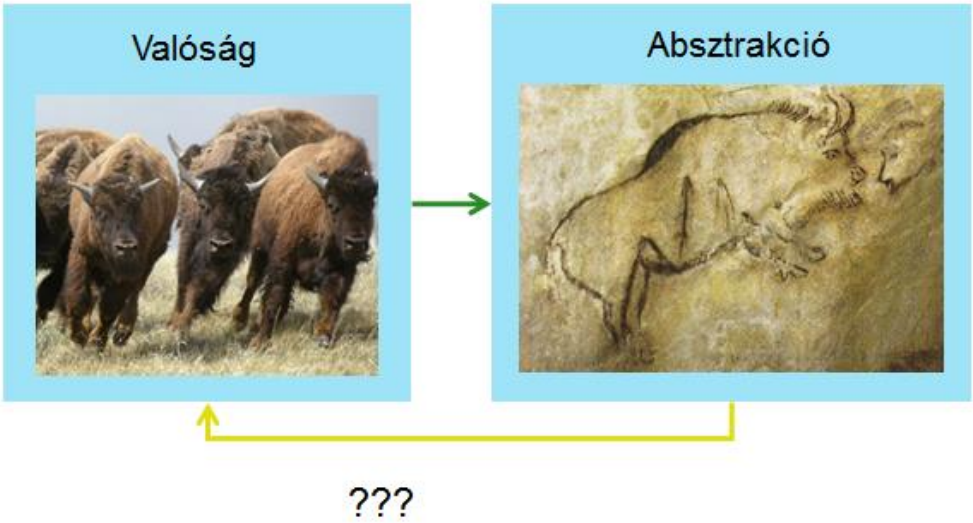
- modellezés és szimuláció alapvető fogalmai és céljai,
- a modellek csoportosítása és a szimulációk típusai,
- a természeti jelenségek fizikai alapjai,
- a numerikus módszerek matematikai alapjai,
- a modern célszoftverek alkalmazása,
- az elektronikai technológiában előforduló fizikai, kémiai jelenségek modelljének felállítása,
- a szimulációs eredmények felhasználása a problémamegoldásban és paraméterek optimalizálásában.

2. Modellezés és szimuláció alapjai

Bármilyen fejlett is a mai számítástechnika, – a nagyon egyszerű dolgoktól eltekintve – még általában képtelenek vagyunk a vizsgált dolgot a teljes létező valójában elemezni. Így rákényszerülünk arra, hogy a modellezés során a vizsgált jelenségek bizonyos tulajdonságait elhanyagoljuk, és csak a vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságokra koncentráljunk.

Mindezek alapján a modellezéssel kapcsolatos alapfogalmak közül az első és legfontosabb az absztrakció. Az értelmező szótár szerint az absztrakció nem más, mint: elvonatkoztatás, elvonás, lényeges tulajdonságok kiemelése, elkülönítése. A modellalkotás során minden esetben az első lépés az absztrakció, amely során a vizsgált dolgot vagy jelenséget tekintve elvonatkoztatunk azon tulajdonságoktól, melyek a vizsgálat szempontjából lényegtelenek, és csak azon kiemelt tulajdonságokat vesszük figyelembe, amelyek a vizsgálat szempontjából jelentősek.

Az 2.1. ábrán az absztrakció legelső és a mai napig is divatos megjelenési formájára láthatunk példát, ami a rajzolás.

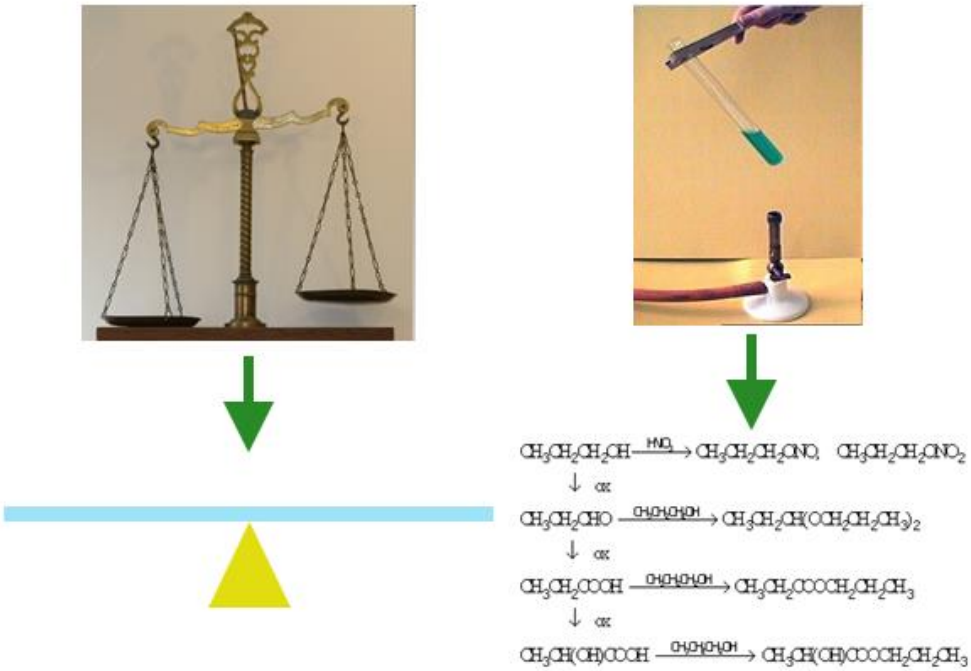


2.1 ábra – Absztrakció.

A példánkon máris feltüntettük az absztrakció egyik legelső és legfontosabb problémáját, miszerint az absztrakció elkészülése felé vezető irány bár

szubjektív, de egyértelmű, addig vajon minden esetben következtethetünk-e az absztrakcióból a leírt jelenességre vagy tárgyra?

A válasz természetesen nem, ha az absztrakció során túl sok vagy túl lényeges tulajdonságokat hagyunk el, vagy nem a megfelelő tulajdonságokat emeljük ki, akkor a modellünk egyáltalán nem (vagy csak részben) fogja leírni a vizsgált tárgyat vagy jelenséget. Következésképpen a modellezés során sok minden már a kezdetekkor eldől, a végeredmény szempontjából nagyon lényeges a modell alkotójának absztrakciós képessége. Csak úgy, mint egy festő esetében a festői gyakorlat, a modellezési gyakorlat is fejleszthető és általában senkinek sem veleszületett tulajdonsága.



2.2. ábra – Absztrakciók a mérnöki gyakorlatban.

Az absztrakciók megjelenési formái igen változatosak lehetnek, a 2.2. ábrán a mérnöki gyakorlathoz közelebb álló példák láthatóak, ami egy mérleg mechanikai absztrakciója, valamint egy vegyi folyamat képletekkel történő leírása.

Összefoglalva elmondható, hogy az ember képes az érzékelést, észlelést meghaladó módon is értelmezni a világot, az általa alkotott absztrakciók segítségével ki tudja deríteni a jelenségeket meghatározó szabályokat, és a szabályok alkalmazásával új, sokszor absztrakt, elvont világot képes felépíteni, amely addig van érvényben, amíg van, aki ezeket az absztrakciókat értelmezni képes [2.1].

Az absztrakciók tárgyalása után a modell fogalma a következőképpen definiálható: *A modell egy tetszőleges entitás egyszerűsített formája (alakja). A modell az entitás vizsgálni kívánt jellegét tartalmazza – és csak azt tartalmazza – olyan formában, amely az adott eszközeinkkel, az adott szempontból vizsgálható.*

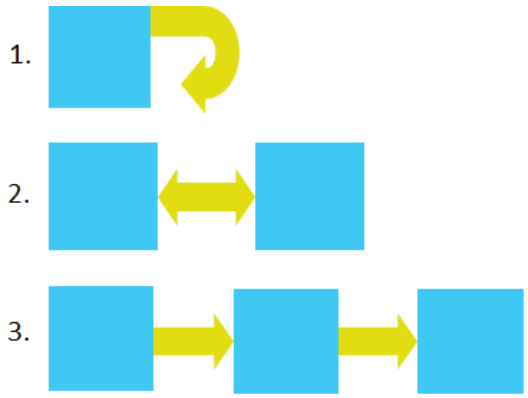
A modellek teljesítik a következő követelményeket:

- a modell egy entitáshoz kapcsolódik,
- a modell egy adott feladat megoldására és egy adott cél elérésére alkalmas,
- a modell az entitás egyszerűsítése,
- az entitás tetszőleges, akár nem létező is lehet.

Mivel a fentiek alapján a modell hasonló a modellezetthez, ezért a modell a modellezettel hasonlósági relációban áll. A hasonlósági reláció ekvivalenvcia reláció, tehát:

1. reflexív (automorfizmus), önmagát önmagába képezi le,
2. szimmetrikus (a modellezett és a modell tulajdonságaiból a másikra következtetéseket lehet levonni),
3. tranzitív (pl. ha a modellt tovább egyszerűsítjük, akkor is a modellezett modellje kell, hogy maradjon).

A fentieket a 2.3. ábrán grafikusan is szemléltetjük.



2.3. ábra – Az ekvivalencia relációk grafikai szemléltetése

A különféle célú modellek csoportosítására számos megoldás létezik, a következőkben ezeket vesszük sorra. Az egyik legelterjedtebb szempont a modell funkciója szerinti csoportosítás. *A* modell ***funkciója*** (a modellezés célja) lehet például a modellezett:

- működésének, felépítésének szemléltetése,
- megtervezése és szintézise,
- teljesítmény (teljesítőképesség) vizsgálata,
- paraméterei hatásának vizsgálata,
- működésével kapcsolatos előírások megvalósíthatóságának vizsgálata,
- működésével kapcsolatos probléma megoldása,
- vizsgálatához szükséges tesztvektorok generálása,
- működésének optimalizálása,
- megvalósíthatóságának vizsgálata (pl. technológiai szempontból),
- stb…

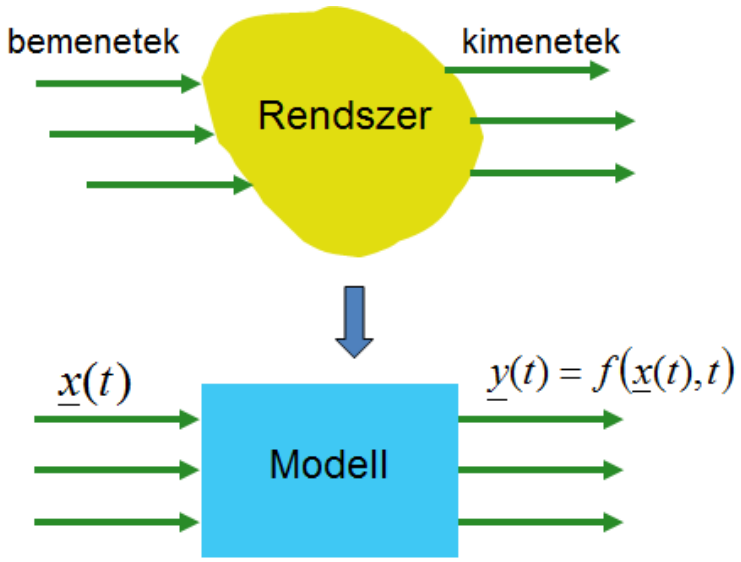
A feladat ***jellege*** alapján a modell lehet:

- direkt (kimenet ismeretlen),
- indirekt (bemenet ismeretlen),
- induktív (modell ismeretlen).

A modellezett ***rendszer alapján*** (amit modellezünk) a modell lehet: fizikai, informatikai, termelési, stb. A modell ***hasonlóság***ának szempontja (miben hasonlít a modellezettre) alapján: szerkezeti, működési, formai, stb. *A* ***modell típusa*** (mivel modellezünk) alapján megkülönböztetünk:

- gondolati, azon belül: fogalmi (pl. gondolatkísérlet), jelképes (empíria adatait és feladatait jelrendszerben fogalmazza meg);
- anyagi, azon belül: geometriai (makett), természetes és ***matematikai*** modelleket, amelyeken belül elérkezünk a számunkra legfontosabb elektromos, termikus, stb alcsoportokhoz.

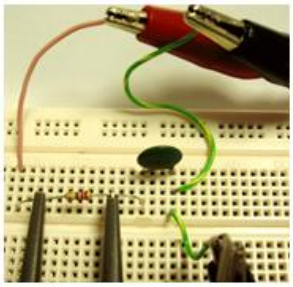
A Technológiai folyamatmodellezés tárgy keretén belül mi leginkább az ún. matematikai modellekkel foglalkozunk. A matematikai modell: a vizsgált rendszerben lejátszódó jelenség, folyamat, a vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságai közötti összefüggések matematikai megfogalmazása. A matematika szimbólumrendszerén keresztül teremt kapcsolatot a vizsgált rendszer be- és kimenő jellemzői között (2.4. ábra).



2.4. ábra – A matematikai modell.

Ezek részei: a matematikai objektumok és relációk. A matematikai modell megalkotása során a fizikai objektumokat matematikai objektumokká, míg a fizikai kapcsolatokat matematikai relációkká alakítjuk. A 2.5. ábrán egy

kondenzátor ellenálláson keresztül történő feltöltés fizikai jelenségét alakítjuk matematikai modellé.



$$C \cdot \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} = 0$$

2.5. ábra – A matematikai modellalkotás.

A matematikai modelleket és azok megoldási lehetőségeit elsősorban a bennük alkalmazott matematikai változók határozzák meg, ezért a matematikai modelleket általában a bennük előforduló változók tulajdonságai szerint csoportosítjuk. Ennek megfelelően a matematikai modell lehet:

- statikus vagy dinamikus (állandó vagy változó),
- idő invariáns vagy variáns (időfüggő vagy időben állandó),
- lineáris vagy nemlineáris,
- diszkrét vagy folytonos,
- idő- vagy eseményvezérelt,
- determinisztikus vagy sztochasztikus.

A következőkben a fentiekben tárgyaltak illusztrálására egy egyszerű, Galileo Galilei által alkotott matematikai modellt mutatunk be annak a fizikai jelenségnek a vizsgálatára, hogy *hogyan változik egy test sebessége szabadesés közben*. A természetben az egyenletesen változó mozgás a lehető legegyszerűbb törvényszerűség szerint megy végbe: a sebesség azonos időtartományban mindig azonos mértékkel növekszik. Galilei rájött arra, hogy ez a kijelentés ekvivalens azzal, hogy a sebesség azonos utak megtétele után azonos mértékkel növekszik. Lássuk, hogyan igazolta felvetését!

Tekintve, hogy akkor még nem volt lehetséges a pillanatnyi sebesség mérése, ezért Galilei felírta a test által megtett utat az idő függvényében, mert a test pillanatnyi sebessége arányos a szabadesésben töltött idővel:

$$v = a \cdot t \tag{2.1}$$

$$v_k = \frac{v}{2} = \frac{a \cdot t}{2} \tag{2.2}$$

Így a test által megtett út a szabadesés közben:

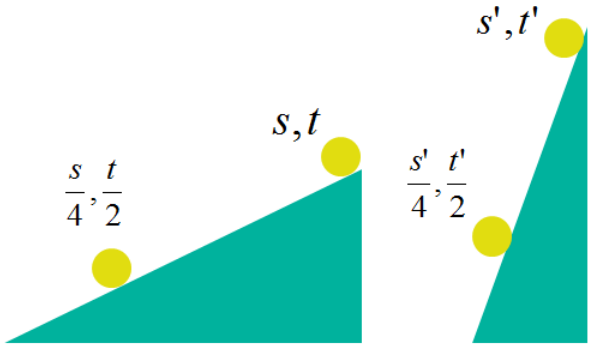
$$s = v_k \cdot t = \frac{a \cdot t}{2} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \tag{2.2}$$

Galileo megfigyelése:

$$\frac{s}{t^2} = \frac{a}{2} = konst. \tag{2.3}$$

A megfigyelés igazolható egy egyszerű kísérlettel (2.6. ábra):

$$\frac{s_1}{t_1^2} = \frac{s_2}{t_2^2} = \ldots \tag{2.4}$$



2.6. ábra – Galilei elméletének ellenőrzése.

Összefoglalva Galilei módszerét a matematikai modellalkotás a következő fő fázisokra bontható:

1. A fogalmak tisztázása (egyenletesen változó mozgás),

2. Hipotézis felállítása a jelenség várható lefolyására vonatkozóan,
3. A hipotézisből matematikai úton olyan összefüggés levezetése, amely kísérlettel igazolható,
4. Az elmélet ellenőrzése kísérlettel.

Galileo érdemeit nem csökkentendő, de a gyakorlatban ma már jóval szofisztikáltabb matematika modellalkotási eljárások is léteznek. Napjainkban a matematikai modellek megalkotása során a következő három módszer egyikét alkalmazzuk.

1. White-box, azaz „fehér doboz" eljárás, amely fizikai megfontolásokra, törvényszerűségekre támaszkodik. Azt feltételezi, hogy a vizsgált jelenséget és annak „mozgató okát" 100%-os mértékben ismerjük. Így az alkalmazott modell paramétereinek mindig valós fizikai tartalma van, emiatt a modell felépítése általában rendkívül komplex és hosszadalmas.

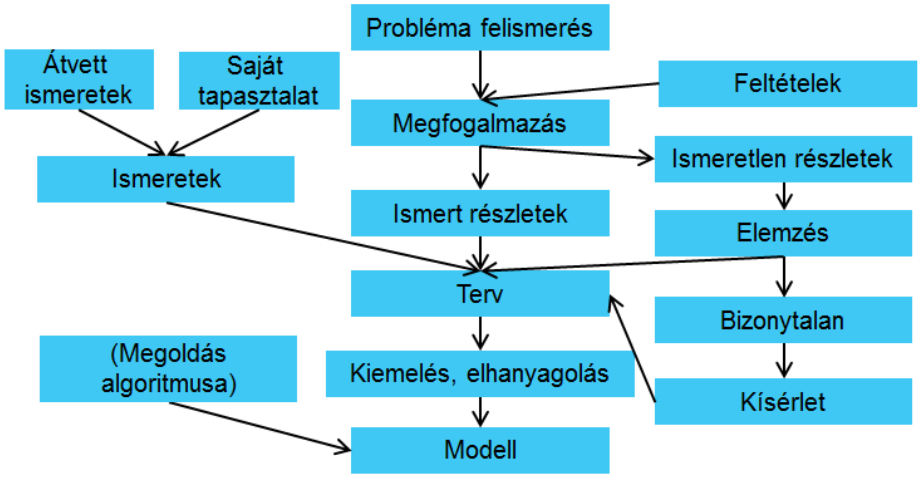
2. Black-box, azaz „fekete doboz" eljárás, amely kísérletekre, mérésekre támaszkodik (pl. átmeneti függvény). Azt feltételezi, hogy a vizsgált jelenséget és annak „mozgató okát" egyáltalán nem vagy csak kis mértékben ismerjük. Így az alkalmazott modell paramétereinek valós fizikai tartalma nincs, és ezért a modell felépítése egyszerű.

3. Gray-box, azaz „szürke doboz" eljárás, amely a két fenti módszer kombinációja. Azt feltételezi, hogy a vizsgált jelenséget és annak „mozgató okát" közepes mértékben ismerjük. Így az alkalmazott modell paraméterei egy részének van valós fizikai tartalma, míg más részének nincs (pl. tapasztalati úton megfigyelt korrekciós faktorok). A gyakorlatban ez a legelterjedtebb.

A 2.7. ábrán a matematikai modell előállításának egy lehetséges sémája látható. A probléma felismerésétől és megfogalmazásától a modellig haladó főág mellett a munka során megjelennek a mellékágak. Ezek közül kiemelendő az ún. „saját tapasztalatok" felhasználása, - ahogy erre már korábban utaltunk – a megalkotott modell alkalmazhatóságát és hatékonyságát nagymértékben befolyásolja a készítő „modellezési" tapasztalata. Lényeges pont továbbá az „ismert" és „ismeretlen" részletek

pontos szétválasztása, majd az „ismeretlen” részletek megfelelően alátámasztott kísérletekkel történő meghatározása.

Fontos még kiemelni, hogy a „megoldás algoritmusa”, azaz a szakzsargonban a matematikai modell „kódolása” egy a modellalkotástól definiten elkülönülő folyamat. Alapvetően hibás az a modellkoncepció, amikor a modellalkotás a kódolással indul, kiforrott koncepció nélkül!



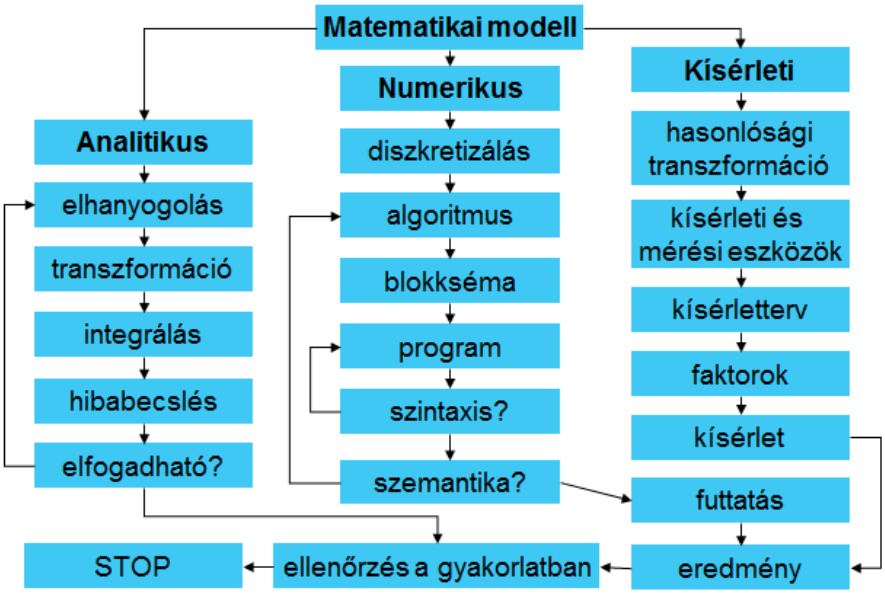
2.7. ábra – A matematikai modell előalításának egy lehetséges sémája.

Eddigiekben csak a matematikai modellnek, mint elméleti tervnek a megalkotásáról beszéltünk, a továbbiakban rátérünk a matematikai modell megoldására, más néven a szimuláció fogalmi körére.

A szimulációt a következőképpen definiálhatjuk:

- egy adott probléma megoldására felállított matematikai modell felhasználása a vizsgált jelenség vagy rendszer megismerése érdekében,
- a szimuláció során az adott rendszer bemenetén megjelenő változóknak, valamint a belső paramétereknek a rendszer kimenő paramétereire gyakorolt hatásait elemezhetjük,
- a szimuláció „bemenete” az – ellenőrzött – modell.

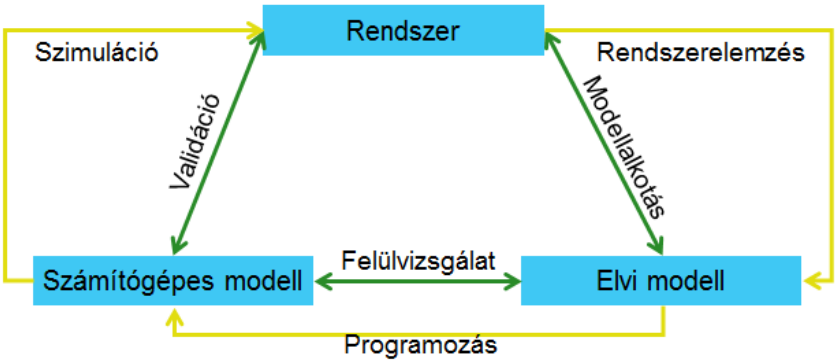
A 2.8 ábrán a matematikai modell megoldásának lehetséges folyamatai láthatók. A korábban tárgyalt analitikus és numerikus megoldás mellett a matematikai modellek akár kísérleti úton is megoldhatók, bár a módszer nem elterjedt az alkalmazandó hasonlósági transzformációk nehézségei miatt.



2.8. ábra – A matematikai modell megoldásának lehetséges folyamatai.

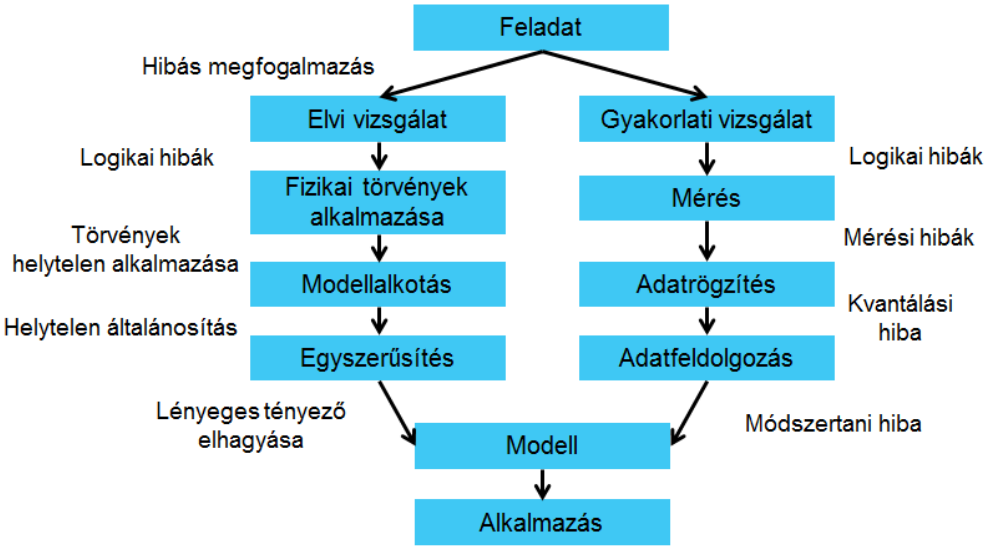
Bármelyik megoldási módszert is választjuk, lényeges, hogy a végeredményt a gyakorlatban mindig ellenőrizni kell, valamint becslést kell adni a számítási vagy mérési hibára. A továbbiakban a numerikus megoldásra koncentrálunk. Numerikus szimulációk esetén a modellalkotás és a modell megoldásának fő lépései a 2.9 ábrán látható módon kapcsolódnak össze.

A vizsgálandó rendszer vagy jelenség elemzése után megszületik az elvi matematikai modell, amely a megoldás algoritmizálása után egy számítógépes modellben ölt testet, ami a szimulálja a rendszerünk viselkedését. A három fő blokk között „oda-vissza” irányú ellenőrzési köröket kell elvégeznünk. A számított eredményeket validálni, azaz ellenőrizni kell a vizsgált rendszer valós működése alapján. Ennek eredményéből kiindulva az elvi modell korrigálható, ami alapján a számítógépes modell is felülvizsgálható.



2.9. ábra – A matematikai modell megoldásának lehetséges folyamatai.

Amíg egy probléma felismerésétől eljutunk annak modelljéig, számos hibát véthetünk. A 2.10. ábrán ezen hibák közül emeltük ki a leglényegesebbeket a hiba esetleges előfordulásának helyével együtt, elvi és gyakorlati megközelítés esetére is.



2.10. ábra – Kiemelt hibalehetőségek.

Ahogy az a 2.10 ábrán látható, gyakorlati megközelítés esetén leginkább az alkalmazott műszereink okozhatnak problémát, míg elvi vizsgálat esetén a modellalkotó hiányos fizikai – matematikai tudása.

A következőkben az eddigiekben ismertetett modellalkotási algoritmust prezentáljuk egy gyakorlati példán keresztül, amely témája *a vastagréteg ellenállás feszültség és áram viszonyainak* modellezése.

Megfogalmazás (2.7 ábra): Vékony vezetőben kialakuló áram- és feszültségviszonyok (stacionárius) leírása.

Feltételek (2.7 ábra)**:** Az ellenállásra adott áramot kényszerítünk, adott környezetei paraméterek és geometria mellett.

Ismert részletek (2.7 ábra)**:**

- Ohm-törvény: $J = \sigma \cdot E$
- Maxwell-egyenletek,
- hőterjedés: $Q_{cond} = \lambda F \cdot gradT$, $Q_{conv} = \alpha_N F \left(T_{test} - T_{körny} \right)$, $Q_{rad} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T_{test}^4$
- termo-mechanika: $T = c \cdot S$
- termo-rezisztivitás: $\rho(T) = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \Delta T)$
- piezorezisztivitás: $\frac{\Delta \rho}{\rho} = \pi \cdot T$
- potenciálszámítás: $\Delta V = -\int E \cdot dl$

Az egyes egyenletek mögöttes tartalmát később részletezzük, (a példa szempontjából most nem lényegesek.)

Ismeretlen részletek (az egyes állandók):

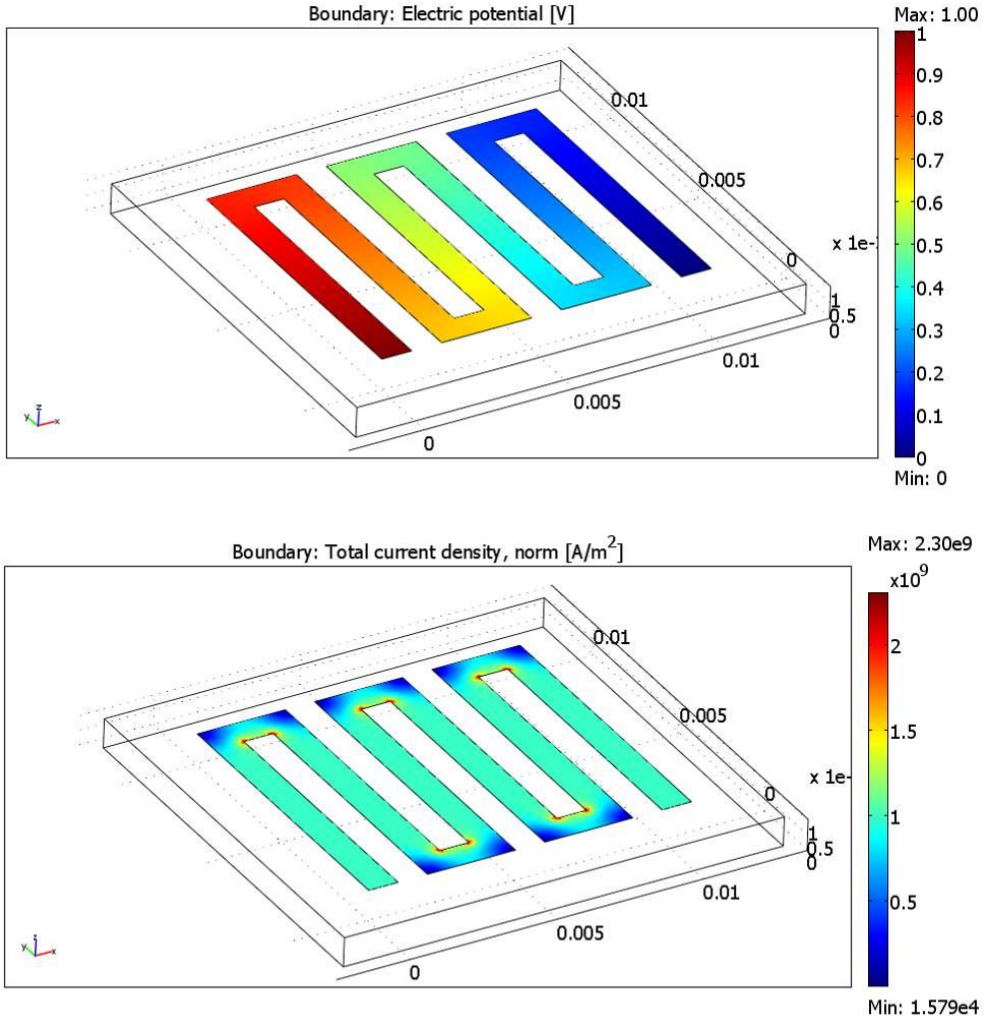
- hőterjedési (λ, αN, σ),
- termomechanikai (c),
- termorezisztív (α),
- piezorezisztív (π),
- ???

Az állandók meghatározása elemzés és kísérlet útján (ld. 2.7 ábra).

Terv (2.7 ábra)**:** a Maxwell-egyenletek és a potenciál definíciója alapján a potenciál felírása a hossz függvényében.

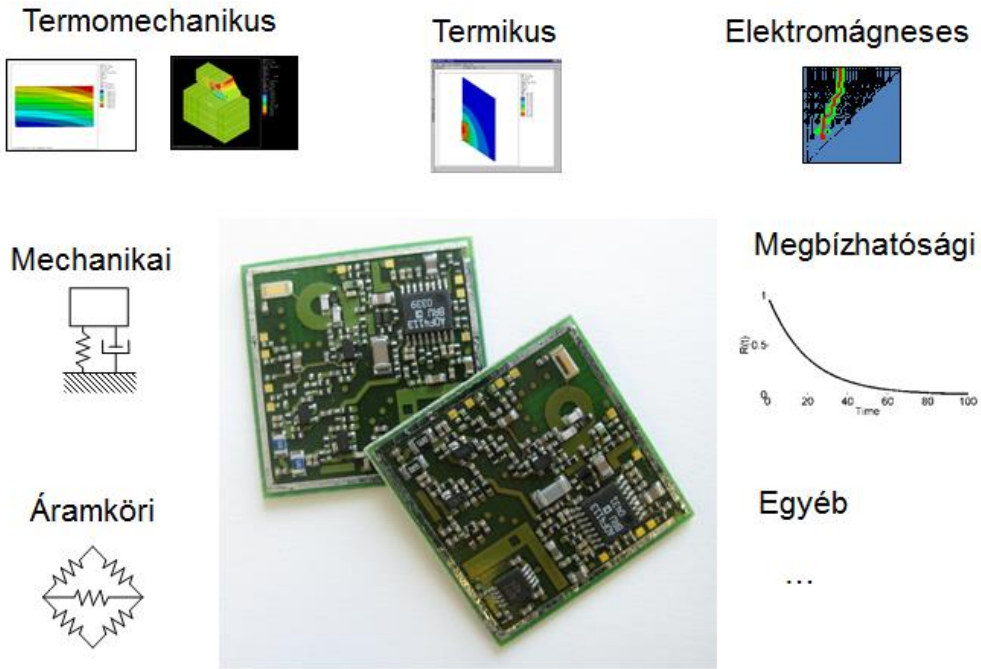
Kiemelés és elhanyagolás (2.7 ábra): sarkok hatása, hőmérsékletfüggés, stb.

A kész **modell** (2.7 ábra): $J = \sigma \cdot E$ és $\Delta V = -\int E \cdot dl$, az eredmények a 2.11 ábrán láthatók.



2.11. ábra – A vastagréteg ellenállás feszültség és áram viszonyai.

A 2. fejezet zárásaként, a 2.12. ábrán összefoglaltuk az elektronikus eszközök kapcsán leggyakrabban felmerülő szimulációs lehetőségeket, amelyeket a következő fejezetekben részletesen ismertetünk.



2.12. ábra – A modellezés szerepe az elektronikai technológiában.

A 2. fejezet ellenőrző kérdései:

1. Definiálja a modell és az absztrakció fogalmát!
2. Csoportosítsa a modelleket a következő szempontok szerint: funkció, a feladat jellege, a modellezett rendszer, a modell típusa.
3. Definiálja a matematikai modell fogalmát!
4. Mi a három legfőbb matematikai modellalkotási módszer/elv?
5. Milyen hibákat véthetünk egy modell megalkotása során?
6. Adjon sémát egy valós probléma modelljének létrehozására!
7. Ismertesse az elektronikai technológia területén előforduló legfontosabb modellezési feladatokat!

3. Fizikai alapok

Ahogy a 2. fejezetben már tárgyaltuk, a megfelelő matematikai modellek létrehozásához elengedhetetlen a modellezett jelenség fizikai hátterének pontos ismerete, ezért a 3. fejezetben bemutatjuk az elektronikai technológia szempontjából leglényegesebb fizikai folyamatokat és azok matematikai leírását. Olyan esetekben, ahol az adott téma a villamosmérnök képzés szerves részét képezi (pl. termodinamika, villamosságtan, stb.) csak a terület összefoglalására és átismétlésére törekszünk. Ahol viszont a téma távolabb áll a villamosmérnök hallgatóktól (pl. áramlástan) részletesebb, az alapoktól felépített ismereteket közlünk.

3.1 Hőterjedés és diffúzió

A 3.1 fejezetben a hőterjedés és a diffúzió (spontán anyagtranszport) jelenségek egymással rokon vonásaik miatt együttesen kerülnek bemutatásra. A hőterjedés (hőtranszport) kis túlzással az általunk vizsgált és modellezett rendszerek mindegyikében jelentős szerepet játszó energiatranszport folyamat.

A termikus modellezés szerepe az elektronikai technológiában a következőképpen foglalható össze:

- az elektromos alkatrészekben működésük során hő keletkezik,
- a készülékeket kívülről különböző hőhatások érhetik,
- a hő és a hőmérséklet változása káros hatásokat gyakorolhat az elektromos készülékek működésére.

Magas hőmérséklet hatásai:

- anyagok termikus és vegyi bomlása,
- diffúzió felgyorsul,
- polimerek lágyulása és öregedése,
- villamos paraméterek változása.

Hőmérsékletváltozás hatása:

- anyagok hőtágulásának illesztetlenségéből származó mechanikai feszültség léphet fel.

A hőterjedés fizikai leírása aktívan foglalkoztatta elődeinket is. A hőterjedés elmélet főbb történelmi mérföldkövei a következők:

- (Caloricium elmélet)
- ~1600: hőmérő – Galilei
- ~1700: hőmérsékleti skála – Celsius és Fahrenheit
- 1701: hőleadás szabálya – Newton
- ~1750: hőegyensúly, fajhő, látens hő fogalma – Joseph Black
- 1799: a hő nem szubsztancia – Rumford
- 1822: hővezetés elmélete – Fourier
- 1879: hőmérsékleti sugárzás – Stefan, Boltzmann

A hőterjedés elmélet három különböző hőterjedési metódust különböztet meg, amelyek a következők:

- *Hővezetés*
- *Hőszállítás*
- *Hősugárzás*

A hővezetés (idegen néven kondukció) során a hőenergia terjedése a szilárd testekben a helyhez kötött részecskék közötti kinetikus energiaátadással és a szabad részecskék diffúziójával valósul meg. Matematikai leírása az ún. Fourier-törvény (1822):

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot F \cdot \frac{dT}{dx} \tag{3.1.1}$$

ahol dQ/dt a hőáram, λ a fajlagos hővezetési együttható, F a felület, dT/dx a hőmérsékleti gradiens.

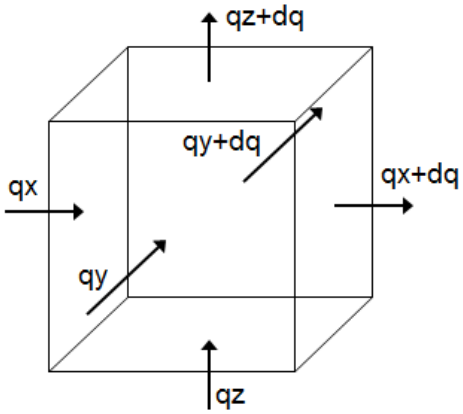
A hővezetés általános egyenletének levezetésénél vegyük fel egy dx-dy-dz elemi élű kockán (3.1.1 ábra) az x irányban be és kilépő hőáram különbségét:

$$q_x(x) - q_x(x+dx) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dydz\right)dx \tag{3.1.2}$$

Hasonlóan y és z irányban is végezzük ezt el:

$$q_y(y) - q_y(y+dy) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} dxdz\right)dy \tag{3.1.3}$$

$$q_z(z) - q_z(z+dz) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} dxdy\right)dz \tag{3.1.4}$$



3.1.1 ábra – dx-dy-dz elemi élű kocka.

A dV térfogat energiamérlege a következő: keletkező energia (ki mínusz bemenő energiaáram) = entalpia megváltozás:

$$qxqyqz - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)\right] dxdydz = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(dxdydz) \tag{3.1.5}$$

Egyszerűsítés után:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)\right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.1.6}$$

Amennyiben a λ fajlagos hővezetési együttható hőmérséklet független:

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]=\frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.1.7}$$

A hővezetés általános egyenlete Fourier gondolatmenete alapján is levezethető: írjuk le egy tetszőleges test hőmérsékletét a hely és az idő függvényében! A vizsgálat tárgya legyen egy rúd (1D), melynek kezdeti hőmérséklete legyen ismert, két végét pedig tartsuk állandó hőmérsékleten.

Feltételezzük az alábbiakat:

1. A hőáramsűrűség arányos a hőmérséklet hosszegységre eső változásával, azaz:

$$J=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x} \tag{3.1.8}$$

2. a rúd dx hosszúságú darabjának hőtartalma azért változik meg, mert a két határoló lapon átáramló hőmennyiség nem egyforma, azaz:

$$\frac{\partial J}{\partial x}=-\rho\cdot c\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.1.9}$$

ahol J a hőáramsűrűség.

Ennek megfelelően szintén 3.17-et kapjuk (1D-s verzióban):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\rho\cdot c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.1.10}$$

A hőszállítás (vagy idegen nevén konvekció) során a hőenergia terjedése gázokban és folyadékokban a közeget alkotó részecskék rendezett elmozdulásával (áramlás) valósul meg, de szerepet játszhat a részecskék közötti molekuláris szintű hővezetés és sugárzás is. Matematikai leírása, a már bemutatott általános hővezetési egyenlet kiegészítve az ún. konvektív részekkel (részletesen ld. a 3.3 fejezetben):

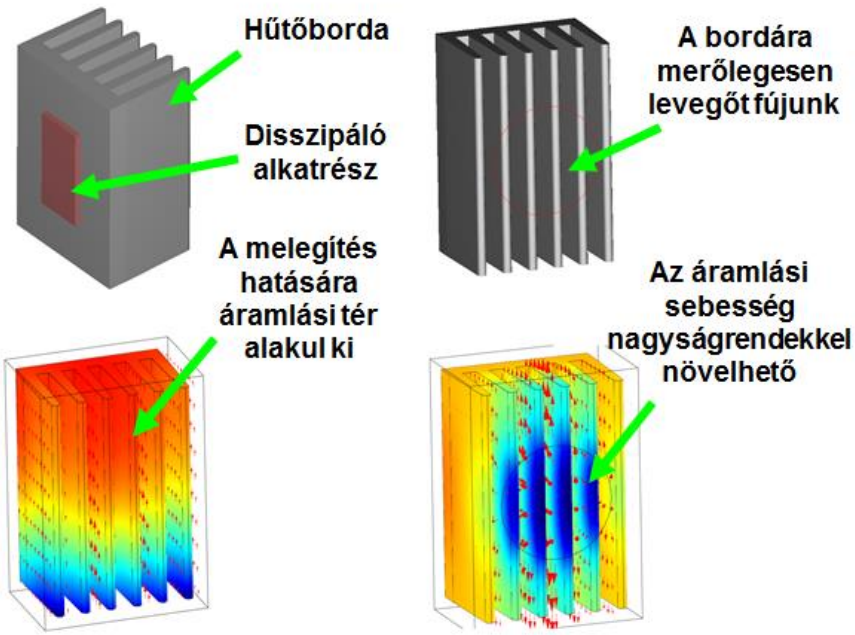
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{\rho c}{\lambda}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v\frac{\partial T}{\partial x}+u\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{3.1.11}$$

(a sugárzás elhanyagolásával, ha az áramló közegben csak hővezetés és tömegáramból adódó hőáramlás van), ahol v, u és w a közeg sebesség összetevői, melyek a Navier-Stokes egyenlet segítségével határozhatók meg (részletesen ld. 3.3 fejezet).

A közegben a sebességtér kialakulása lehet:

- természetes, abban az esetben, ha a vizsgált anyagok sűrűsége nagymértékben hőmérsékletfüggő (tipikusan gázok esetében) és ezért melegítés hatására áramlás alakul ki,
- mesterséges, a gáz vagy folyadék mesterséges áramoltatásával.

Ezek alapján megkülönböztetünk természetes és kényszer konvekciót. A 3.1.2 ábrán a természetes és a kényszer konvekciós hűtős összehasonlítása látható egy hűtőbordás alkalmazás esetén.



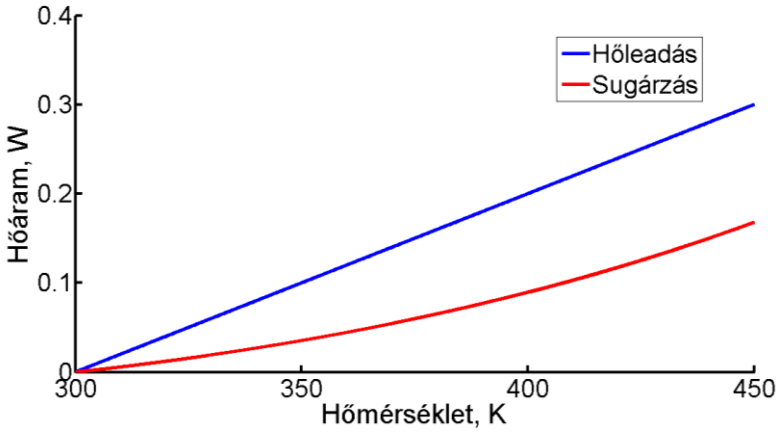
3.1.2. ábra – Természetes és kényszer konvekció.

A hősugárzás (idegen nevén radiáció) az energia térbeli terjedésének elektromágneses hullámok formájában megvalósuló folyamata. Matematikai leírása az ún. Stefan-Boltzmann törvény (1879):

$$\frac{dQ}{dt} = \varepsilon \cdot \sigma_0 \cdot F \cdot \left(T_{sz}^4 - T_k^4\right) \tag{3.1.12}$$

(csak ún. szürke testekre érvényes!) ahol dQ/dt a hőáram, ε az emissziós tényező, σ_0 a Stefan-Boltzmann állandó (5,67e-8 $Wm^{-2}K^{-4}$), F a felület, T_{sz} a szilárdtest hőmérséklete és T_k a környezet hőmérséklete.

A hősugárzás a legtöbb elektronikai technológiai alkalmazásban elhanyagolható mértékű, mivel a 3.1.12-es egyenletből fakadóan, jelentős sugárzási hőáram csak igen magas hőmérséklet különbségek esetén áll elő. A 3.1.3 ábrán a hősugárzás és a hőleadás (ld. részletesen később) mértékét hasonlítottuk össze egy 1 cm^2-es T_f=T_k=300K hőmérsékletű, α=20 $Wm^{-2}K^{-1}$ hő diffúziós és ε=0.9 emissziós tényezővel rendelkező felület esetében.



3.1.3. ábra – Hősugárzás és hőleadás mértékének összehasonlítása.

(A fenti kijelentés alól kivételt képez a kifejezetten hősugárzás elvén működő, ún. infra-sugaras (IR) újraömlesztő forrasztó kemence.)

A hőátadás a szilárd testek és a folyadékok (gázok esetében is) határfelületén létrejövő hőterjedés, melyben a hővezetés, a hőszállítás és a hősugárzás is egyaránt szerepet játszik. Emiatt lényeges kiemelni, hogy a

hőátadás nem egy „negyedik hőtranszport” folyamat! Matematikai leírása: az ún. Newton-szabály (1701):

$$\frac{dQ}{dt} = h \cdot F \cdot \left(T_{sz} - T_f\right) \tag{3.1.13}$$

ahol dQ/dt a hőáram, F a felület, Tsz a szilárd test hőmérséklete, Tf a folyadék (gáz) hőmérséklete, h az ún. hőátadási tényező. A fenti összefüggést Newton tisztán megfigyelés sorozatok eredményére alapozta, ami a módszer látszólagos egyszerűsége ellenére, annak nehézségét is okozza. Miszerint a képletben szereplő hőátadási tényező teljesen alkalmazásfüggő, pontos meghatározása nehézkes és elméleti levezetése nem lehetséges.

A hőleadási tényező függ:

- a hőmérséklettől
- a test és a folyadék hővezető képességétől,
- a test felületének minőségétől,
- az áramlás sebességétől,
- az áramlás típusától (lamináris, turbulens)
- a folyadék fizikai tulajdonságaitól (nyomás, sűrűség, stb…).

A 3.1 fejezet bevezetésében tárgyaltaknak megfelelően, a diffúzió (spontán anyagtranszport) jelenségét is ebben a fejezetben tárgyaljuk, a hőterjedéssel – és ezen belül is a hővezetéssel – rokon vonásai miatt.

A diffúzió egy anyagáramlási jelenség, melynek hajtóereje a sűrűségkülönbség. Az anyagáramlás sebessége a sűrűséggradienssel arányos. Ha más erő nem lép fel, a diffúzió képes megszüntetni a sűrűségkülönbséget. Fick 1855-ben vezette le a sűrűségkülönbség miatt kialakuló spontán anyagtranszport jelenségét (Fick I. törvénye):

$$\frac{dc}{dt} = J = -D \cdot \frac{dc}{dx} \tag{3.1.14}$$

ahol c a koncentráció, J az áramsűrűség és D a diffúziós tényező.

Ha egy dx méretű szakasz koncentrációjának változását vizsgáljuk (a tömegmegmaradás miatt a koncentráció csak a tömegáram miatt változhat):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} J = \frac{\partial}{\partial x}\left(-D\frac{\partial c}{\partial x}\right) \tag{3.1.15}$$

Így Fick II. törvénye, a koncentráció időbeli változására:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{3.1.16}$$

Vegyük észre az analógiát a Furier (3.1.1) és a Fick I. (3.1.14), valamint az általános hővezetés (3.1.7) és a Fick II. (3.1.16) egyenletei között!

A 2. fejezetben már tárgyaltuk, hogy a fenti egyenleteink megoldására milyen módszerek állnak a rendelkezésünkre (2.8 ábra). Tekintsük át ezeket részletesebben. Az egyenletek megoldásának módszerei:

- Analitikus megoldás,
- Analóg modellezés (kísérleti),
- Numerikus közelítő módszerek:
    - Állandósult állapot: a Poisson és Laplace egyenlet megoldása
        - végesdifferencia-módszer,
        - végeselem,
        - végestérfogat,
        - grafikus módszerek,
        - stb.
    - Tranziens állapot: az általános egyenlet megoldása szükséges
        - végesdifferencia-módszerek:
            - explicit,
            - implicit,
            - kevert (pl. Crank-Nicolson)
        - végeselem,
        - végestérfogat,
        - stb.

A numerikus megoldási módszereket a későbbiekben még részletesen tárgyaljuk. Most viszont nézzünk egy példát egy egyszerű differenciálegyenlet analitikus megoldására, hogy szemléltessük annak nehézségeit.

A példa a következő: a vizsgálat tárgya egy rúd (1D), melynek kezdeti hőmérséklete ismert, két végét pedig állandó hőmérsékleten tartjuk. A rúd hossza l, kezdeti hőmérséklete u(x,0)=f(x), a peremfeltételek: u(0,t)=0 és u(l,t)=0. Adjuk meg az u(x,t) függvényt!

A megoldandó egyenlet: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ahol $\alpha^2 = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$ a hőmérséklet-vezetési (hő diffuzivitási) tényező. (A „termikus potenciált” sok esetben u-val is szokták jelölni.)

Keressük a megoldást az alábbi alakban: $u(x,t) = X(x)T(t)$, ekkor: $\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t)$ és $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$, amit behelyettesítve az megoldandó egyenletbe kapjuk: $X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$, melynek változói szétválaszthatók: $\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$.

A fenti egyenlet egyik oldala t-től, a másik x-től függ, ez csak úgy lehetséges, ha mindkét oldal állandó (az állandó legyen $-\beta^2$), azaz:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\beta^2 \text{ és } c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\beta^2$$

így a feladatot visszavezettük e két egyenlet megoldására:

1. $T'(t) + \beta^2 T(t) = 0$

2. $X''(x) + \left(\frac{\beta}{c}\right)^2 X(x) = 0$

Először oldjuk meg 1-et:

1. $$\frac{dT}{dt} = -\beta^2 T \to \frac{dT}{T} = -\beta^2 dt \to \ln|T| = -\beta^2 t + a \to$$
$$\to T = \exp\left(-\beta^2 t + a\right) = A \cdot \exp\left(-\beta^2 t\right)$$

2. a karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 0$, melynek gyökei: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\lambda}{k} \cdot i$.

így 2 megoldása: $X(x) = B \cdot \cos\frac{\alpha}{k}x + C \cdot \sin\frac{\alpha}{k}x$.

Az eredeti parciális differenciálegyenlet megoldása tehát:

$$u(x,t) = X(x)T(t) = \left(B\cos\frac{\beta}{\alpha}x + C\sin\frac{\beta}{\alpha}x\right)A\exp\left(-\beta^2 t\right) =$$
$$= \left(D\cos\frac{\beta}{\alpha}x + E\sin\frac{\beta}{\alpha}x\right)\exp\left(-\beta^2 t\right)$$

AB=D és AC=E állandók a kezdeti feltételekből határozhatók meg. Mivel u(0,t)=0, ezért: $0 = D\exp(-\alpha^2 t) \to D = 0$. Mivel u(l,t)=0 és D=0, ezért: $0 = E\left(\sin\frac{\beta}{\alpha}l\right)\exp\left(-\beta^2 t\right)$ a három tényezőből csak a középső lehet nulla (β indexet kap, mert végtelen sok értéke lehet):

$\sin\frac{\beta}{\alpha}l = 0 \to \frac{\beta}{\alpha}l = n \cdot \pi \to \beta_n = \frac{n \cdot \pi \cdot \alpha}{l}$, ahol n=1,2,...

Így az egyenletet kielégítő megoldások tehát:

$$u_n(x,t) = E_n\left(\sin\frac{\beta_n}{\alpha}x\right)\exp\left(-\beta_n^2 t\right)$$

Mivel az egyenlet homogén, ezért a partikuláris megoldások összege is az, így a differenciálegyenlet megoldása:

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\exp\left(-\beta_n^2 t\right)\sin\frac{\beta_n}{\alpha}x$$

a még ismeretlen En együtthatókat a kezdeti feltételekből számíthatjuk:

$$U(x,0)=f(x)\rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin\frac{\beta_n}{\alpha}x=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin\frac{n\cdot\pi}{l}x$$

Az En együtthatókat le lehet olvasni, ha f(x) Fourier-sorba fejthető, ehhez az eredeti f(x) függvény értelmezési tartományát kibővítjük (tükrözés az origóra, és 2l szerint periodikus). A megoldás tehát:

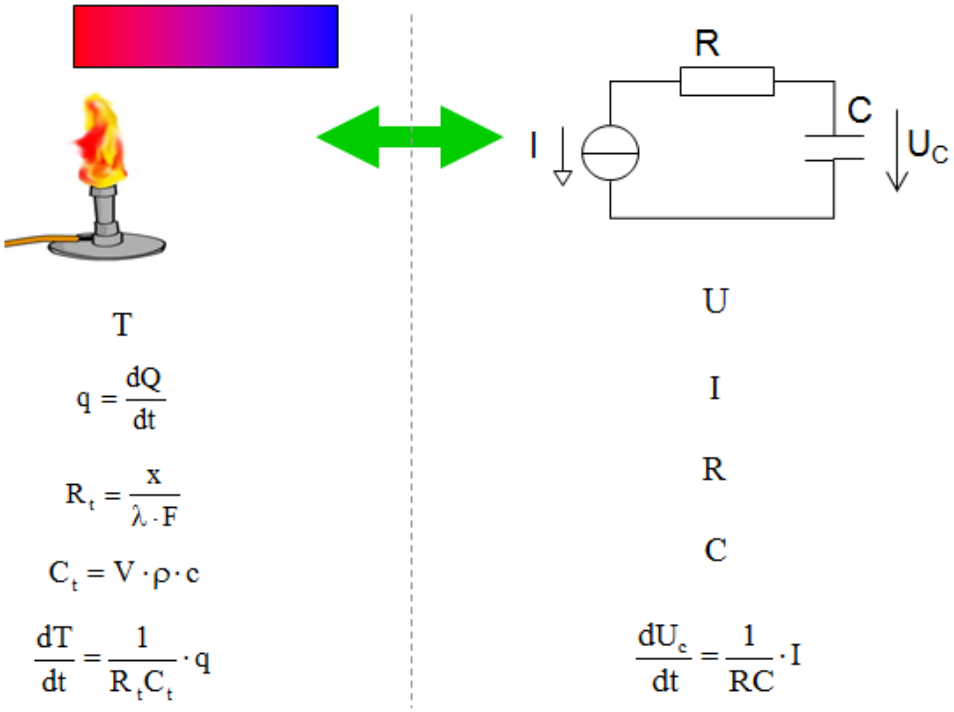
$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\exp\left(-\frac{n\cdot\pi\cdot\alpha}{l}t\right)\sin\frac{n\cdot\pi}{l}x$$

ahol az En-k a kiterjesztett értelmezési tartományú f(x) Fourier-sorának együtthatói.

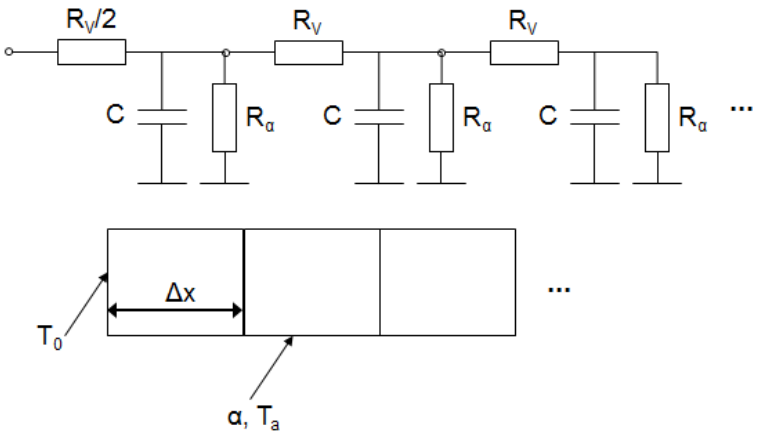
A fenti hosszadalmas és bonyolult levezetés bizonyítja, hogy még egy elsőre egyszerűnek tűnő differenciálegyenlet (mint az 1D-s hővezetés) analitikai megoldás is olyan matematikai apparátus gyakorlati ismeretét igényli, amely nem várható el egy villamosmérnöktől.

A fenti példa egy jóval egyszerűbb – és a villamosmérnökökhöz közelebb álló – megoldási lehetősége Beuken által 1933-ban közzétett ún. villamos-termikus analógia. A módszer alapja, hogy a villamos és termikus változók, illetve egyenletek egy analógia mentén egymásnak megfeleltethetők, ezáltal a termikus példák villamos hálózati példákká konvertálhatók és annak eszköztárával egyszerűen megoldhatók.

A 3.1.4 ábrán az előzőekben tárgyalt 1D-s fűtött rúd problémáját ábrázoltuk a villamos-termikus analógia eszközeivel. Az 1D-s rúd fűtésénél természetesen bonyolultabb termikus problémák is tárgyalhatók a villamos-termikus analógiájával, az ilyen feladatok az elosztott paraméterű hálózatok elve alapján a hálózategyenletek megoldására vezethetők vissza (3.1.5. ábra).



3.1.4. ábra – Villamos-termikus analógia.



3.1.5. ábra – Elosztott paraméterű hálózatok.

Természetesen az 1D-s hővezetés numerikus közelítéssel is megoldható, csak néhány módszer a teljesség igénye nélkül (részletes levezetésüket ld. a 4. fejezetben).

Végesdifferencia-módszerek:

Explicit: $T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right)$ (3.1.17)

Implicit: $T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}\right)$ (3.1.18)

Crank-Nicolson: $T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{a\Delta t}{2(\Delta x)^2}\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n + T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}\right)$

(3.1.19)

ahol $a = \lambda / \rho c$.

A termikus konstrukciók és a termikus modellezés szerepe:

Az elektronikus eszközökben keletkező hőt, a megfelelő működés érdekében a külvilág felé el kell vezetni, amely feladatot a készülék termikus konstrukciója biztosítja.

A termikus tervezésnek két lépcsőjét különböztetjük meg:

- Alkatrész szintű hűtés, amelynek jellemzői a következők:
  - általában meghatározott sarokszámok alapján történik, katalógus adatok alapján (maghőmérséklet, teljesítmény),
  - viszonylag egyszerű számításokra vezethet,
  - nem minden alkatrész esetén szükséges (korábbi saját vagy irodalmi adatok is használhatók).
- Készülék szintű hűtés, amelynek jellemzői a következők:
  - nem feltétlenül állnak rendelkezésre egyértelmű sarokszámok (nincsenek katalógus adatok),
  - jellemzően bonyolult számítások sorozatára vezet,
  - több részegység esetén részegységenként is kell tervezni.

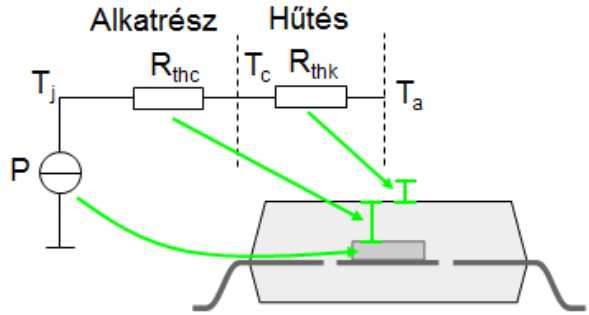
A következőkben először tekintsük át az alkatrész szintű termikus tervezés tipikus példáit. Alkatrész szintű tervezés esetén a villamos-termikus analógia alapján általában meghatározzuk a hőtermelő test és a környezet közötti

hőellenállást, amely segítségével a hőtermelő test felületéről a környezet felé maximálisan disszipálható hőteljesítmény számíthatóvá válik.

Termikus ellenállás számítása egy IC tok esetén a félvezető felületétől a környezetig (3.1.6 ábra):

$$R_{th} = R_{thc} + R_{thk} = \frac{x_c}{\lambda_c \cdot F_c'} + \frac{1}{h_c \cdot F_c}$$

ahol x_c a hőáram átlagos úthossza az alkatrészben, λ_c a tok hővezetési tényezője, h_c az alkatrész hőleadási tényezője, F_c a tok felületének mérete.



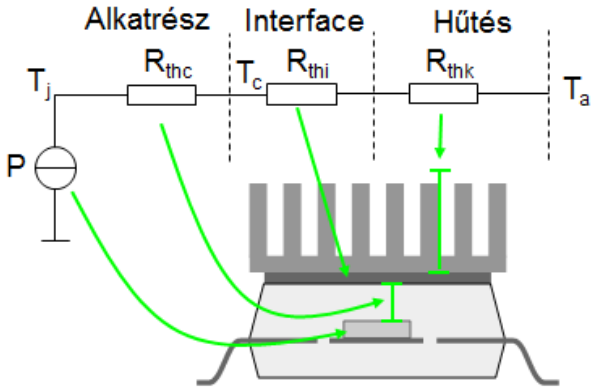
3.1.6. ábra – Hőellenállás számítás 1.

Amennyiben a számított hőellenállás nem teszi lehetővé a kívánt (megfelelő működéshez szükséges) hőteljesítmény eldisszipálását, úgy a rendszer termikus viselkedése javítható egy hűtőborda alkalmazásával.

Termikus ellenállás számítása hűtőbordával hűtött IC tok esetén a félvezető felületétől a környezetig (3.1.7 ábra):

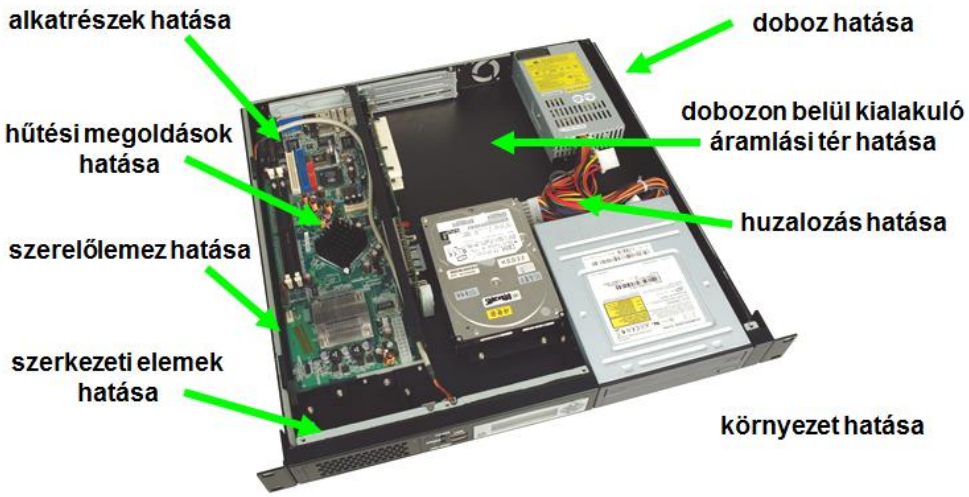
$$R_{th} = R_{thc} + R_{thi} + R_{thk} = R_{thc} + R_{thi} + \frac{x}{\lambda_k \cdot F_k'} + \frac{1}{h_k \cdot F_k}$$

ahol x a hőáram átlagos úthossza a bordában, λ_k a borda hővezetési tényezője, F_k' az „átlagos keresztmetszet”, h_k a borda hőleadási tényezője, F_k a borda felületének mérete.



3.1.7. ábra – Hőellenállás számítás 2.

A készülék szintű termikus modellezés részletes tárgyalása túlmutat jelen tárgyunk keretein, így erre a témakörre csak illusztrációt mutatunk, hogy szemléltessük a számos különféle termikus problémát és feladatot, amivel egy készülék konstrukció tervezése során szembesülünk (3.1.8 ábra).



3.1.8. ábra – Készülék szintű termikus tervezési problémák.

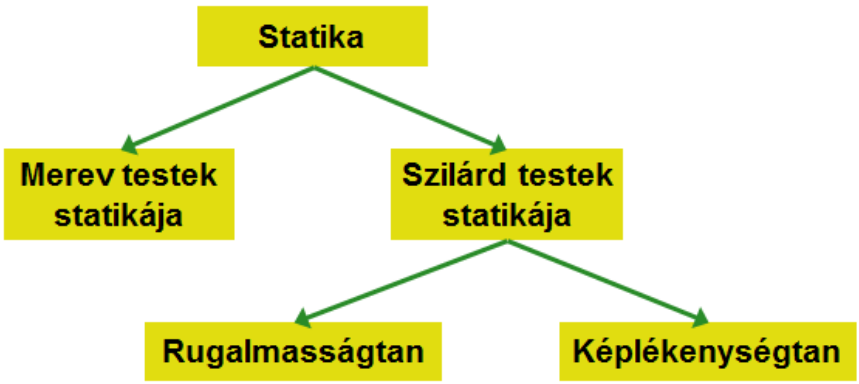
A 3.1 fejezet ellenőrző kérdései:

1. Sorolja fel a hőterjedés (hőtranszport) formáit és jellemzőiket!
2. Milyen törvény írja le a hővezetést?
3. Milyen törvény írja le a hőszállítást?
4. Milyen törvény írja le a hősugárzást?
5. Milyen összefüggés írja le a hőleadást és miben különbözik a hőtranszport folyamatoktól?
6. Milyen törvény írja le a diffúziót és melyik hőterjedési formához hasonlít a matematikai leírása?
7. Milyen lehetőségeink vannak a termikus és anyagtranszport jelenségek matematikai modellezésére?
8. Mutassa be a villamos-termikus analógiát!
9. Termikus konstrukciók esetében milyen szinteket különböztetünk meg, mutassa be ezek sajátosságait!

3.2. Mechanika és termo-mechanika

A 3.2. fejezetben a klasszikus mechanika fizikai és matematikai leírásán kívül tárgyaljuk az ún. termo-mechanika fogalomkörét is, mivel az elektronikai technológiában legalább olyan fontossággal bír, mint a klasszikus mechanikai problémák.

Először definiáljuk a szilárdságtan fogalmát. A szilárdságtan feladata választ adni arra a kérdésre, hogy egy szilárd testben a kvázi statikus terhelő külső erőrendszer hatására milyen belső erők ébrednek és milyen alakváltozások jönnek létre. A 3.2.1 ábrán a szilárdságtan elhelyezése látható a mechanika egyes ágai között.



3.2.1. ábra – A szilárdságtan elhelyezése.

A szilárdságtan fizikai leírása aktívan foglalkoztatta elődeinket is. A szilárdságtan elmélet főbb történelmi mérföldkövei a következők:

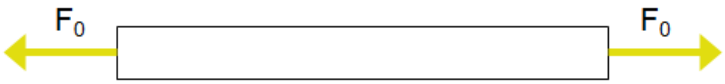
- 1638, Galilei – hajóépítés,
- Hooke – Hooke-törvény,
- Euler – rudak viselkedése,
- Navier – rugalmassági modulus, hajlítás (mély- és magasépítés),
- Caushy – matematikai leírás (mély- és magasépítés),
- Mohr – szakadás elmélete (19. sz., vasútépítés korszaka),
- 20. század: a járműipar fejlődése okán a szilárdságtan gyors fejlődése, a közelítő módszerek (pl. végeselem) alkalmazásának bevezetése.

(Fontos megjegyezni, hogy a manapság rendkívül népszerű ún. „végeselem” módszer (ld. részletesen a 4. fejezetben) kifejlesztését, alapvetően mechanikai problémák indukálták.

Egy testben külső erő hatására ébredő belső erők meghatározása. A belső erő nagysága a 3.2.2 ábrán látható egyszerű esetben:

$$\sigma = {F_0}/{A} \tag{3.2.1}$$

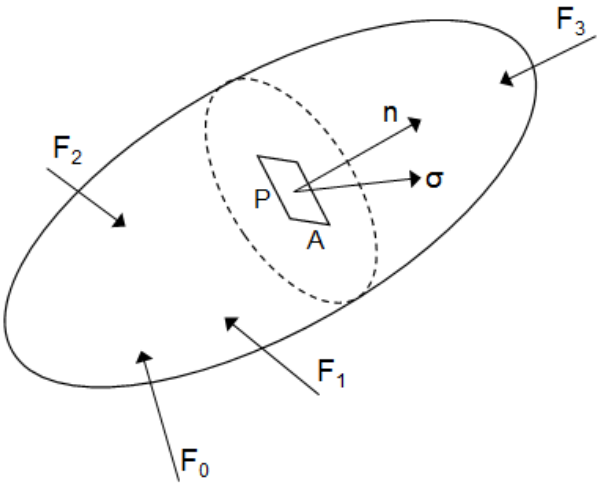
ahol F_0 a terhelő erő, A a keresztmetszet, σ a „belső erő” azaz feszültség (N/m^2, Pa)



3.2.2. ábra – Külső és belső erők, példa.

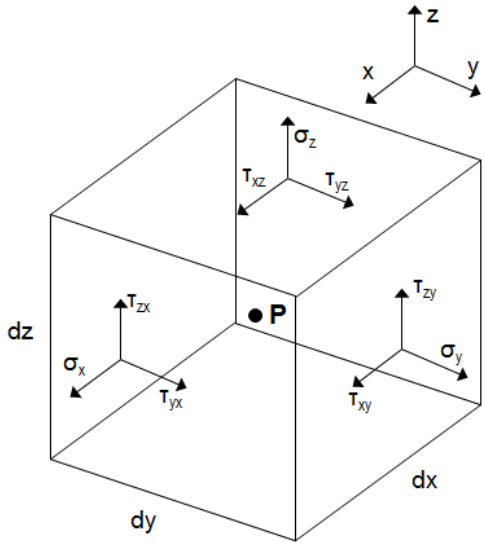
A feszültség felírása általános esetben (3.2.3 ábra):

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} \tag{3.2.2}$$



3.2.3. ábra – A feszültség felírása általános esetben.

Ahol σ_n a normális irányú komponensek (húzó- vagy nyomófeszültség) más néven normálfeszültségek, még τ_n a tangenciális irányú komponensek (nyírófeszültség), más néven csúsztatófeszültség. A normálfeszültségek a lapokra merőlegesek, míg a csúsztatófeszültségek a lapokkal párhuzamosak (3.2.4 ábrán látható módon).



3.2.4. ábra – Normál- és csúsztatófeszültségek

Egy testben ébredő belső feszültségek egy ún. feszültség tenzorban írhatók fel:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{3.2.3}$$

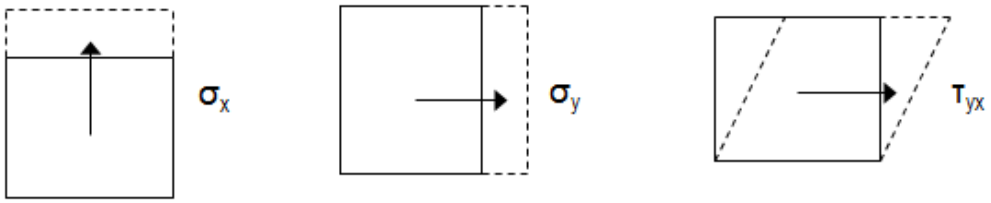
ahol az első index mindig a feszültség irányába mutat, míg a második index azt mutatja, melyik normálisú síkon ébred. Lényeges megjegyezni, hogy az azonos indexeket tartalmazó csúsztató feszültségekre mindig igaz a következő összefüggés:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \tag{3.2.4}$$

A következőkben vizsgáljuk meg azt, hogy mi a belső feszültségek hatása a szilárd testekre. A mechanikai feszültség rugalmas szilárd testekben reverzibilis alakváltozást (deformációt, d) hoz létre, amely arányos a feszültséggel:

$$d =\sim \sigma \tag{3.2.5}$$

A deformáció iránya a feszültség jellegétől függ, amit a 3.2.5 ábrán szemléltetünk.



3.2.5. ábra – A deformáció iránya.

Mivel a szuperpozíció jelen esetben is érvényes, ezért a deformáció (fajlagos nyúlás, ϵ) a feszültséghez hasonlóan szintén tenzormennyiség:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{3.2.6}$$

ahol:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.2.7}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{3.2.8}$$

ahol u, v és w az elmozdulás vektor x,y és z irányú komponensei.

A feszültség és a deformáció közötti kapcsolatot rugalmas szilárd test esetében a megalkotójáról elnevezett „Hook-törvény” adja meg:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{3.2.9}$$

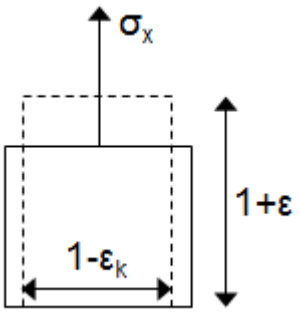
ahol E a rugalmassági tényező vagy modulus (más néven Young modulus). Meg kell azonban jegyezni, hogy nem minden anyag viselkedik így. Egyes műanyagok és a gumi nem lineáris tulajdonságokat mutat, vagyis a rugalmassági modulus a terheléstől is függ, nemcsak az anyagminőségtől. Ezért a rugalmassági modulus pontosabb definíciója:

$$E = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tag{3.2.10}$$

Léteznek olyan anyagok is, amelyek egyáltalán nem követik a Hooke-törvényt, mivel tartósan folynak. Így viselkedik sok műanyag, de egyes fémek is, például az ólom. A szilárd anyagokat aszerint is csoportosíthatjuk, hogy rugalmassági modulusuk függ-e a terhelés irányától. A legtöbb fém és kerámia rugalmassági tulajdonságai a terhelés irányától függetlenek, ezeket mechanikai szempontból izotróp anyagoknak nevezzük. Vannak azonban olyan mechanikai szempontból anizotróp, illetve ortotróp anyagok, például szálas szerkezetű anyagok, fa, kompozit anyagok, amelyek rugalmassági modulusa a terhelés irányától függ. (Például a szénszálas műanyagok szálirányban sokkal merevebbek, mint arra merőlegesen).

Egy húzott test nem csak a húzóerő irányában, hanem keresztirányban is változtatja méretét (4.2.6 ábra), melynek mértéke anyagfüggő állandó, a Poisson féle tényező:

$$\nu = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} \tag{3.2.11}$$



3.2.6. ábra – Keresztirányú alakváltozás.

A fentiek alapján a rugalmassági tenzor általános esetben felírható, tegyük ezt meg először mechanikai szempontból izotróp anyagokra. A felírás egyszerűsödik, ha a feszültség és a deformáció sorvektor alakú:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{3.2.12}$$

ahol

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \tag{3.2.13}$$

A rugalmassági modulust csak húzásra-nyomásra értelmezzük. Nyírásra a nyírási rugalmassági modulus érvényes:

$$\tau = G \cdot \gamma \tag{3.2.14}$$

itt τ a csúsztató feszültség, ϒ a szögelfordulás, G a nyírási rugalmassági modulus. A rugalmassági modulus és a nyírási rugalmassági modulus (csúsztató rugalmassági modulus) között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.2.15}$$

ahol ν a Poisson féle tényező. A fentiek segítségével a rugalmassági tenzor általános felírása mechanikai szempontból ortotróp anyagokra is megadható:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} \end{bmatrix} \tag{3.2.16}$$

(Anizotróp anyagra a D mátrix minden eleme egymástól független.)

Egy adott test természetesen nem képes bármekkora feszültség elviselésére, belső anyagszerkezeti károsodás vagy törés nélkül. A különféle ún. *Feszültségelméletek* a tönkremenetellel (töréssel) foglalkoznak (3.2.7 ábra).

3.2.7. ábra – Feszültség elmélet.

Több egymástól némileg eltérő feszültség modell is létezik, amelyek általában a megalkotójukról kapták a nevüket. Az egyes levezetések mellőzése nélkül a legtöbbet alkalmazott modellek:

Coulomb modell: $\sigma_{red}\left(Coulomb\right) = \max\left(\left|\sigma_1\right|, \left|\sigma_3\right|\right)$ (3.2.17)

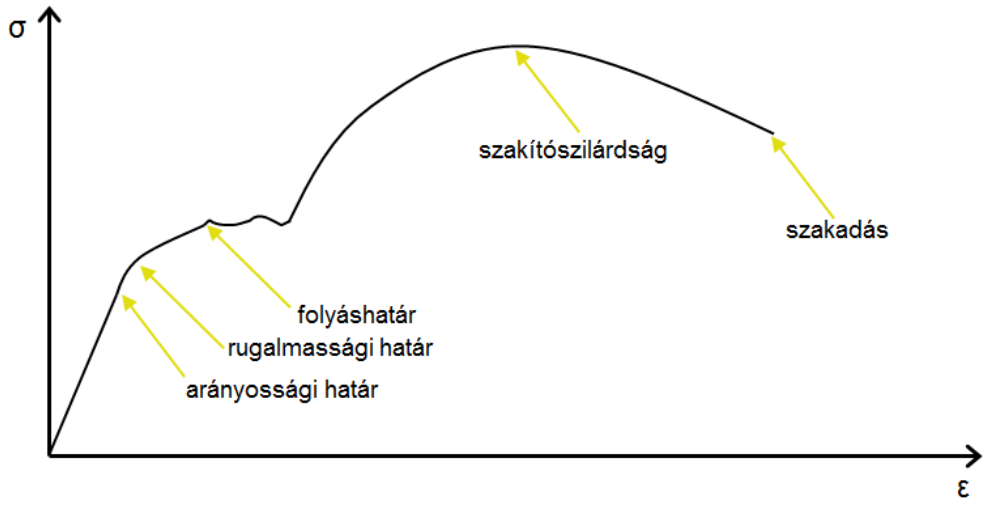
Mohr modell: $\sigma_{red}\left(Mohr\right) = \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)$ (3.2.18)

Mises modell:

$$\sigma_{red}\left(Mises\right)=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_x-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+6\cdot\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2\right)\right]} \tag{3.2.19}$$

ahol σ_{red} a redukált feszültség (az adott pontban a feszültségi állapotot tönkremenetel szempontjából egyértelműen jellemzi), σ_1 a legnagyobb, σ_3 a legkisebb főfeszültség. A főfeszültség azon egymásra merőleges síkokon ébredő feszültségek, amely síkok kiválasztása esetén a nyírófeszültségek eltűnnek.

A 3.2.8 ábrán egy fémekre jellemző szakítódiagramot ábrázoltunk.

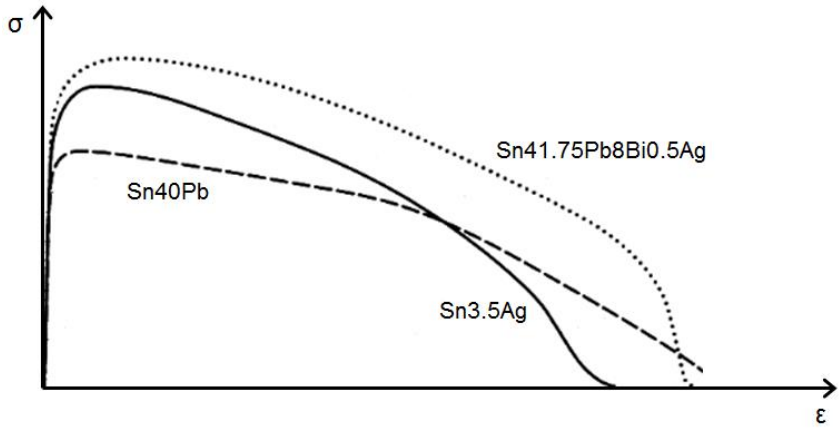


3.2.8. ábra – Szakítódiagram.

Figyeljük meg a diagram jellegzetes szakaszait/pontjait, amelyek a következők:

- Arányossági határ
- Rugalmassági határ
- Folyáshatár
- Szakítószilárdság
- Szakadás

A 3.2.9 ábrán néhány az elektronikai technológiában alkalmazott forraszötvözet szakítódiagramját szemléltetjük.



3.2.9. ábra – Különféle forraszötvözetek szakítódiagramja.

A következőkben áttérünk a ***termo-mechanikai*** problémák alapjainak tárgyalására, amely tudományág azzal foglalkozik, hogy milyen mechanikai feszültségek és ennek hatására milyen mechanikai elváltozások történnek a szilárd testekben hő hatására. A belső feszültség hatására kialakuló hőtágulást dimenziónként is számíthatjuk, ennek megfelelően megkülönböztetünk:

Lineáris hőtágulást: $l_k = l_0\left(1+\alpha\Delta T\right)$ (3.2.20)

felületi hőtágulást: $A_k = A_0\left(1+2\alpha\Delta T+\alpha^2\Delta T^2\right) \approx A_0\left(1+2\alpha\Delta T\right)$ (3.2.21)

térfogati hőt.: $V_k = V_0\left(1+3\alpha\Delta T+3\alpha^2\Delta T^2+\alpha^3\Delta T^3\right) \approx V_0\left(1+3\alpha\Delta T\right)$ (3.2.22)

ahol a deformáció mértéke: $\varepsilon = \alpha \cdot \Delta T$ (3.2.23)

és a mechanikai feszültség mértéke: $\sigma = D \cdot \varepsilon = D \cdot \alpha \cdot \Delta T$ (3.2.24)

Jelen esetben α a fajlagos hőtágulási tényező. A deformáció a fent definiált különböző anyagtípusokra (izotróp, ortotróp és anizotróp) különböző módon adható meg az α fajlagos hőtágulási tényező irányonként eltérő definiálásával.

Általános (vektoros) felírásában a 3.2.23-as egyenlet a következőképpen alakul:

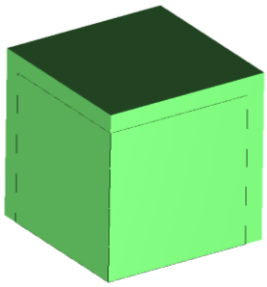
$$\varepsilon_{th} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix}_{th} = \alpha_{vec} \cdot \left(T - T_{ref} \right) \qquad (3.2.24)$$

ahol a fajlagos hőtágulási tényező,

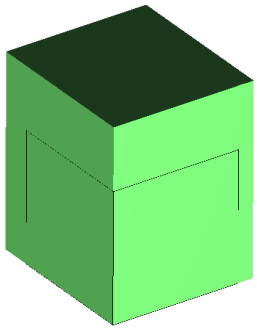
izotróp anyagra: $\alpha_{vec} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (3.2.25)

ortotróp anyagra: $\alpha_{vec} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (3.2.26)

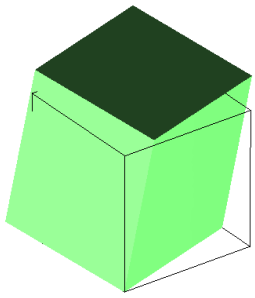
anizotróp anyagra: $\alpha_{vec} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ \alpha_{xy} \\ \alpha_{yz} \\ \alpha_{xz} \end{bmatrix}$ (3.2.27)



3.2.10. ábra – Izotróp tágulás



3.2.11. ábra – Ortotróp tágulás



3.2.12. ábra – Anizotróp tágulás

A termo-mechanikus feszültségek okozhatnak:

- nagy behatás (hirtelen lehűtés/felmelegítés) esetén azonnali törést,
- magas hőmérsékleten kúszást,
- ismételt igénybevétel (hőtágulásból származó) esetén fáradást.

A következőkben tanulmányozzuk a konstans ***emelt hőmérséklet*** hatásait.

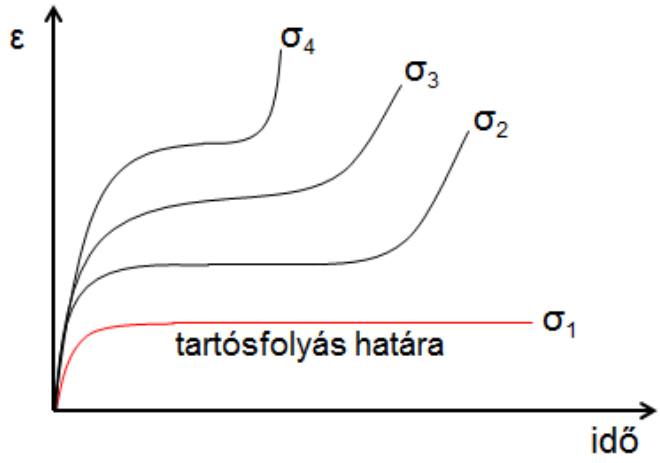
A tartósfolyás (creep) során az anyag folyamatos alakváltozást szenved, vagy a benne ébredő feszültség folyamatosan csökken (relaxáció). A jelenség jellemzői:

- folyáshatárnál kisebb feszültség esetén is fellép,
- alacsony olvadáspontú fémek és polimerek esetén már szobahőmérsékleten is felléphet.
- Mértéke függ:
    - anyagminőségtől,
    - terhelés időtartamától,
    - hőmérséklettől,
    - termo-mechanikai feszültségtől.
- Mechanizmusa:
    - diszlokációk vándorlása,
    - diffúzió.

A kúszás általános egyenlete:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{C\sigma^m}{d^b} \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right) \tag{3.2.28}$$

ahol C egy anyagminőségi paraméter (kúszási szempontból), m és b további kúszási anyagjellemzők, Q a kúszási mechanizmus aktivációs energiája, d az anyag szemcsenagysága, k a Boltzmann állandó és T a hőmérséklet. A 3.2.13 ábrán különféle kúszási jelleggörbéket ábrázoltunk az idő függvényében.

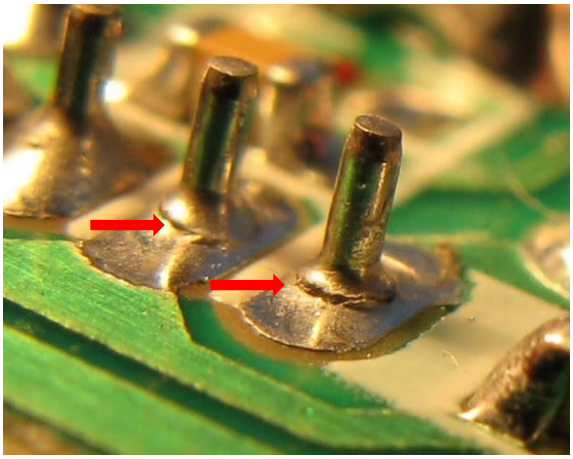


3.2.13. ábra – Kúszási jelleggörbék.

A következőkben tanulmányozzuk az ***ismételt termikus igénybevétel*** hatásait. A „kis ciklusszámú” ismételt termikus igénybevétel hatására bekövetkező fáradást az ún. *Coffin-Manson* modell segítségével írhatjuk le. A Coffin-Manson modell alapfelvetései:

- a terhelés során folyáshatár feletti feszültség,
- ciklusszám: $10^3 ... 10^4$,
- a tönkremenetel alapvető oka a repedések keletkezése és terjedése,
- modell: $\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \varepsilon_f \left(2N\right)^c$ (3.2.29)

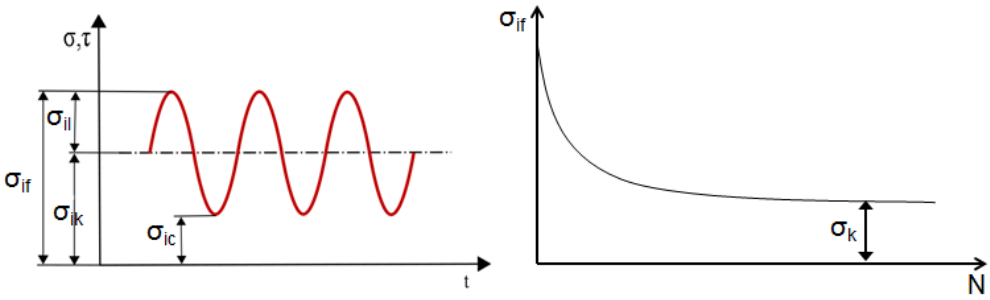
ahol $\Delta\varepsilon/2$ a deformáció amplitúdója, ε_f az azonnali szakadáshoz tartozó deformáció, N a ciklusok száma és c anyagra jellemző tapasztalati állandó (fémek esetén -0,5…-0,7 közötti érték). A 3.2.14 ábrán kis ciklusszámú ún. „hősokk” terhelésnek alávetett forrasztott kötések láthatok. A képen jól megfigyelhetők az alkatrész kivezetések és a forrasz találkozásánál kialakult repedések.



3.2.14. ábra – Repedések a forrasztott kötésekben.

A „nagy ciklusszámú” ismételt termikus igénybevétel hatására bekövetkező fáradást az ún. *Wöhler* modell segítségével írhatjuk le. A *Wöhler* modell alap felvetései:

- a terhelés során folyáshatár alatti feszültség
- ciklusszám: $>>10^4$
- a tönkremenetel alapvető oka a diszlokációk vándorlása
- harmonikus terhelés esetér a 3.2.15 ábrán prezentálva.



3.2.15. ábra – A Wöhler modell harmonikus terhelés esetén, ahol N a töréshez szükséges ciklusok száma, σ_k a határfeszültség (csak szerkezeti anyagok esetén)

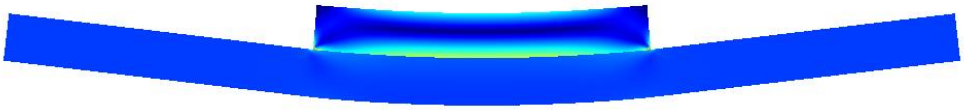
Az elektronikai alkalmazásokban a deformációt leginkább befolyásoló tényezők a következők:

- hőtágulási tényezők illesztetlensége (pl. chip és hordozó között),
- anyagok mechanikai paraméterei,
- geometriai méretek,
- diszkrét alkatrészek kialakításának módja,
- hőmérséklet,
- hőmérsékleti gradiens.

Az elektronikai alkalmazásokban tipikus deformációs következmények a következők:

- rétegek delaminációja (elválása),
- chip törése,
- forrasztott kötés törése,
- forrasztott kötés fáradásos törése.

A 3.2.16 ábrán két különböző hőtágulási tényezővel rendelkező egymáshoz rögzített anyag (pl. Si chip és FR4-es hordozó) termikus terhelés során fellépő mechanikai feszültségét (szín információ az ábrán) és deformációját ábrázoltuk.



3.2.16. ábra – Feszültség és deformáció két különböző, egymáshoz rögzített anyag esetén.

A 3.2 fejezet végén tekintsük át a tipikusan az elektronikai technológia jellege okozta nehézségeket a termo-mechanikus modellezés és szimuláció során:

- gyakoriak a „lapos” geometriák (a tér felületi irányokban nagyságrendekkel nagyobb méretek, mint a vastagsági irányban),
- nagy eltérések a rendszer elemeinek méreteiben (pl. kisméretű felületszerelt alkatrész nagyméretű szerelőlemezen),
- ortotróp és anizotróp tulajdonságú inhomogén anyagok gyakori alkalmazása (pl FR4 üvegszál erősítésű epoxy lemez),

- termikus szempontból nagyon különböző anyagok együttes alkalmazása (pl. fémek és műanyag).
- Az anyagi paraméterek problémái:
    - nagy szórás,
    - a szükséges paraméterek az irodalomban nem fellelhetők vagy nagy eltéréseket mutatnak,
    - ipari titok miatti nehézségek.

A 3.2. fejezet ellenőrző kérdései:

1. A szilárdságtan alapfeladata, leírása általános esetben, a feszültség és a feszültségtenzor fogalma.
2. A feszültség hatása: deformáció (tenzora), a rugalmassági és a Poisson-féle tényező.
3. Mit jelentenek a következő fogalmak: izotróp, ortotróp, anizotróp?
4. Feszültségelméletek fogalma.
5. Mi a mechanikai/termomechanikai modellezés célja (az elektronikai technológiában)?
6. A tartósfolyás (creep) fogalma.
7. Kis ciklusszámú fáradás jellemzői.
8. Nagy ciklusszámú fáradás jellemzői.

3.3. Folyadékok áramlása

A 3.3 fejezetben a folyadék áramlásának fizikai leírásával foglalkozunk, amely témakört a villamosmérnök képzéstől való „nagyobb távolsága” miatt az előzőeknél részletesebben tárgyalunk. A témakör mérete indokolja, hogy azt az előzőektől eltérően nem egyben, hanem három alfejezetre bontva mutassuk be. Az egyes alfejezetek a következők: áramlástani alapok, turbulens áramlási problémák és áramlástani hűtési megoldások.

3.3.1 Áramlástani alapok

A fizikai problémák vizsgálata során nyugvó közeg esetén a folyadékok és gázok gyakran együtt kezelhetők, azonban áramlásnál ez nem mindig tehető meg (csak kis sebességnél és ha a hőmérséklet nem változik), mert eltér a különféle közegek kompresszibilitása, a sűrűsége, továbbá gázok esetén az előző két paraméter erősen hőmérsékletfüggő tulajdonságot is mutat. Folyadékok áramlása esetén általában figyelembe kell venni a belső súrlódásokat is. A fentiek miatt a gázok és folyadékok áramlásának leírása elkülönül:

- aerodinamika (gázok),
- hidrodinamika (folyadékok),

(félreértésekre adhat okot, hogy sokszor mindkét területre a „hidrodinamika” kifejezést használják).

Az áramlástani feladatokat kétféleképpen is megközelíthetjük:

1. A közeget elemi részecskékre osztva az egyes részecskék mozgását vizsgáljuk, és megadjuk ezeknek a részecskéknek a pályáját. Az ilyen jellegű vizsgálatok hátránya, hogy rendkívül nagy számításigényt és összetett matematikai hátteret igényelnek. Előnyük viszont, hogy kis térrészekben nagy pontossággal írja le az adott viszonyokat.
2. A közeg pontjainak sebességét vizsgáljuk, és megadjuk a sebességvektornak a helytől és időtől való függését. Az ilyen jellegű vizsgálatok előnye a kisebb számításigény, egyszerűbb matematikai

háttér, és a gyakorlati feladatoknál célravezetőbb az alkalmazás. (A továbbiakban csak ezzel a megközelítéssel foglalkozunk.)

Az áramlások jellemzéséhez általában három mennyiség szükséges:

- sebességtér: **v**(x,y,z,t),
- nyomás skalártere: p(x,y,z,t),
- sűrűség skalártere: ρ(x,y,z,t).

A feladatok megoldásához alkalmazni kell:

- a közegre vonatkozó mozgásegyenleteket,
- a tömegmegmaradást kifejező kontinuitási tételt,
- a közeg állapotegyenletét, amely a nyomás és a sűrűség közötti összefüggést adja meg. (Csak gázok esetében.)

A fent felsorolt skalár és vektor mennyiségek megváltozása különbözőképpen tárgyalható.

Skalárterek megváltozásának jellemzése a gradiens vektor segítségével történik. Leggyakoribb skalárterek: nyomás, sűrűség, hőmérséklet. Gradiens vektor előállítása a nyomás (p) esetén a következő:

$$grad\ p = \frac{\partial p}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\bar{k} \qquad (3.3.1)$$

A gradiens vektor értelmezése: skalártér változásának jellemzése egy vektorral amely:

- a skalártér legrohamosabb változásának irányával párhuzamos,
- a függő változó növekedésének irányába mutat,
- hossza arányos a változás rohamosságával,
- merőleges a szintfelületre (szintvonalra).

Vektorterek megváltozásának jellemzésére több lehetőségünk is van. Az első a hely szerinti változása a derivált tenzor segítségével. Áramlások vizsgálata esetén a leggyakoribb vektortér a sebesség:

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k} = \bar{v}(x, y, z, t) \tag{3.3.2}$$

amelyek komponensekre bonthatók:

$$v_x = v_x(x, y, z, t); v_y = v_y(x, y, z, t); v_z = v_z(x, y, z, t); \tag{3.3.3}$$

A sebesség hely szerinti változása a derivált tenzor segítségével.

$$\Delta\bar{v} = \bar{\bar{D}}\Delta\bar{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x & \frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y & \frac{\partial v_x}{\partial z}\Delta z \\ \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x & \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y & \frac{\partial v_y}{\partial z}\Delta z \\ \frac{\partial v_z}{\partial x}\Delta x & \frac{\partial v_z}{\partial y}\Delta y & \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z \end{bmatrix} \tag{3.3.4}$$

Az előzőnél – szemléletessége miatt – jóval gyakrabban alkalmazott módszer a vektorterek megváltozásának jellemzésére a divergencia számítás. A sebességtér divergenciája:

$$div\, v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{3.3.5}$$

A divergencia értelmezése: vektortér változásának jellemzése egy skalárral amely,

- értéke az áramlási tér adott pontjában megmutatja, hogy egységnyi idő alatt, egységnyi térfogatból mennyivel több folyadéktérfogat lép ki, mint be,
- mértékegysége 1/s,

További lehetőségek a vektorterek változásának jellemzésére a rotáció- és potenciálszámítás, bár ezeket ritkábban alkalmazzák, így erre most nem térünk ki.

Az előzőekben tárgyalt ***hely szerinti (konvektív)*** változások mellett az áramlástanban alkalmazott jellemzőink ***lokálisan, azaz idő szerint*** is

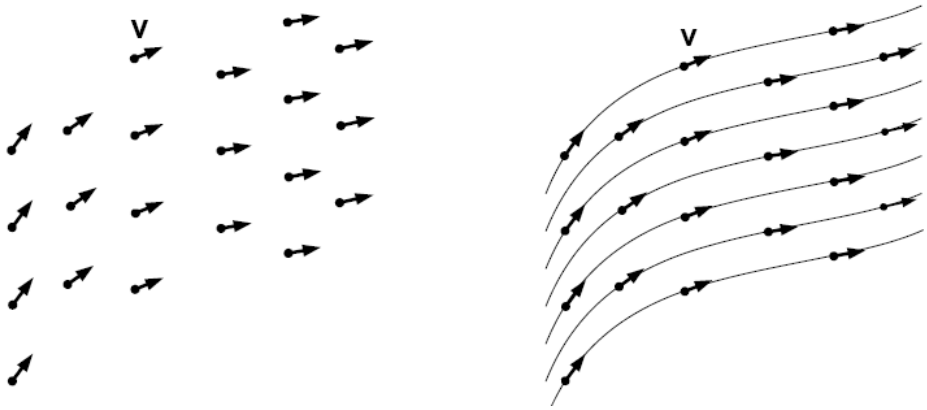
megváltozhatnak. Így egy jellemző (pl. nyomás) teljes változása a következőképpen írható le:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp_l}{dt} + \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + grad\, p \qquad (3.3.6)$$

ahol *l* a lokális és *k* a konvektív változás. Lényeges, hogy a fenti kifejezés csak skaláris jellemzők változása esetén értelmezhető! Vektorterek esetében a teljes megváltozás a tér komponensein egyesével értelmezhető, pl. a sebességtér x irányú komponense esetén:

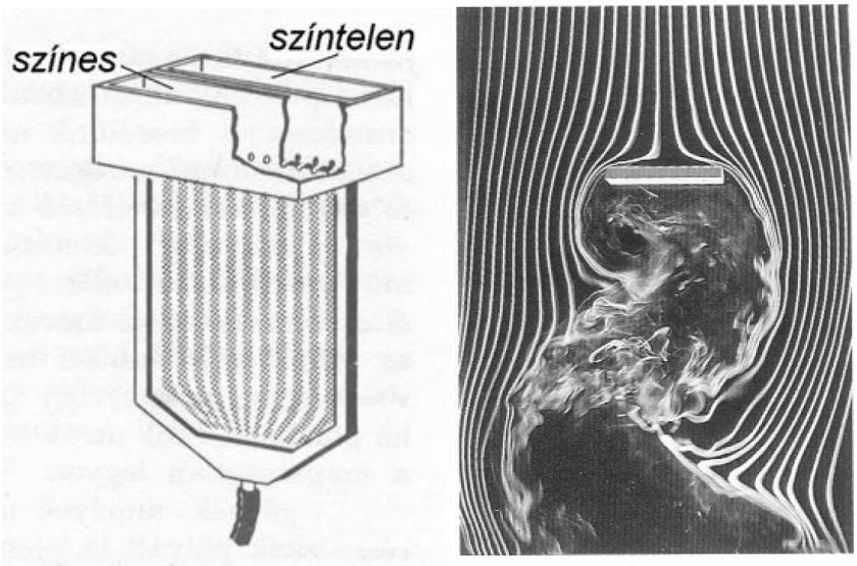
$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \bar{v}\, grad\, v_x \qquad (3.3.7)$$

Áramlások esetén a leggyakrabban ábrázolt és legszemléletesebb jellemző a sebesség. A sebességtér megjelenítésére több lehetőségünk is van. Legegyszerűbb, ha az adott időpillanatban az áramlási tér minél több pontjába berajzoljuk a sebességvektorokat (sebességvektor-térkép, 3.3.1.a) ábra). Ennél áttekinthetőbb eredményt kapunk, ha a berajzolt sebességvektorokhoz ún. simulógörbéket szerkesztünk, amelyek a sebességvektorok érintői (áramvonalak, 3.3.1.b) ábra). (A módszer természetesen csak akkor alkalmazható hatékonyan, ha a sebességtér időfüggetlen.)



3.3.1. ábra – Sebességtér ábrázolása, a) sebességvektor-térkép; b) áramvonalak.

Az áramvonalak ábrázolására a számítástechnika megjelenése előtt is volt lehetőség. A 3.3.2 ábrán a Pohl-féle áramvonal-készülék (Robert Wichard POHL (1884-1976) német fizikus), és egy a segítségével készített kép látható.



3.3.2. ábra – a Pohl-féle áramvonal-készülék és a segítségével készített kép.

A készülék nagyon egyszerű elven működik: színtelen (de legalábbis optikailag áttetsző) áramló folyadékba keverünk színes szemcséket. A módszert ma is előszeretettel alkalmazzák experimentális kísérletek során.

Az áramlásokat nem csak az áramló közeg szerint, hanem egyes áramlási tulajdonságok alapján is csoportosíthatjuk.

Sűrűségváltozás alapján:

- összenyomható (a sűrűség a nyomás ismeretében állapotegyenletből határozható meg),
- összenyomhatatlan (egyszerűbb, a gázok is közelíthetők így, nem túl nagy nyomás és nem túl nagy áramlási sebesség esetén),

Belső súrlódás alapján:

- súrlódásos:
    - lamináris: az áramvonalak nem metszik egymást,

    - turbulens: az áramvonalak metszik egymást,
- súrlódásmentes (ún. ideális közeg, mérnöki gyakorlatban ritka):
    - örvényes: a részecskék haladó és forgó mozgást is végeznek,
    - örvénymentes: a részecskék csak haladó mozgást végeznek,

Időfüggés alapján:

- stacionárius,
- instacionárius.

Mielőtt belekezdenénk a fenti altípusok részletes tárgyalásába, röviden tekintsük át az áramlástan legfontosabb tételét, amely az ***ún. kontinuitási (folytonossági)*** vagy más néven az áramlástani „anyag megmaradási" tételt. Bármelyik fenti áramlástípusra igaz, hogy az áramlásban „tömeg nem keletkezik és nem is tűnik el". A tömegáram definíció alapján:

$$q_m = \int_A \rho \bar{v} dA \quad [kg/s] \tag{3.3.8}$$

Egy adott térfogatrészből többletkiáramlás csak a sűrűség változás esetén lehetséges, amely mértéke:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \, [kg/s] \tag{3.3.9}$$

A Gauss-Osztrogradszkíj átalakítást alkalmazva a 3.3.9-re:

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V div(\rho \bar{v}) dV \tag{3.3.10}$$

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \bar{v}) \right] dV = 0 \tag{3.3.11}$$

A 3.3.11 egyszerűsítésével kapjuk meg a folytonossági tétel általános alakját:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \bar{v}) = 0 \tag{3.3.12}$$

A 3.3.12-es kifejezés stacioner (idefüggetlen) áramlások esetén,– ahol a lokális változások nem lehetségesek – még tovább egyszerűsíthető:

$$div(\rho\bar{v}) = 0 \qquad (3.3.13)$$

(Az ilyen jellegű áramlások a mérnöki gyakorlatban elég gyakoriak!) Folyadékok stacioner áramlása esetén a sűrűség elég általános megkötések mellett állandónak tekinthető, így a kontinuitási tétel még egyszerűbbé válik:

$$div(\bar{v}) = 0 \qquad (3.3.14)$$

Ahogy azt már korábban is jeleztük, a kontinuitási tételnek minden áramlásban teljesülnie kell, így az az áramlástan első alapegyenletének tekinthető.

A fenti csoportosításból a legegyszerűbben tárgyalható áramlástípus, ***az időben állandó, stacionárius áramlás.*** Gyakorlati jelentősége nagy, mert sok valós feladat leírható ezzel a megközelítéssel (jogos egyszerűsítések alkalmazásával). Valójában az áramlást leíró mozgásegyenletek ebben az esetben is bonyolultak, de megkerülhetők, és az áramlásra vonatkozó alapvető összefüggések írhatók fel.

A feladatok megoldásához (ha a súrlódás elhanyagolható) elegendő lehet a kontinuitási egyenlet és a mozgás egyenlet Bernoulli által egyszerűsített alakja:

$$p + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h = áll. \qquad (3.3.15)$$

ahol ρ a nyomás, v a sebesség, p a nyomás, és h a térfogatelem súlypontjának magassága.

Az előzőeknél már komplikáltabb ***az időben változó, súrlódásmentes áramlás*** tárgyalása, mivel itt nem alkalmazhatók oly mértékű egyszerűsítések az áramlási egyenletekben, mint a stacioner esetben. Az Euler által kifejlesztett módszer (ún. Euler egyenlet) Newton II. axiómája

alapján a folyadékrészekre ható erő és mozgásmennyiségük idő szerinti megváltozása között teremt kapcsolatot:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} grad\, p \qquad (3.3.16)$$

A fenti összefüggést egyszerűsége miatt gyakran alkalmazzák természetes koordinátarendszerben (ahol csak érintő irányú sebesség van):

$$v = v_e, v_n = v_b = 0 \qquad (3.3.16)$$

Az érintő irányú komponens:

$$v\frac{\partial v}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial e} + g_e \qquad (3.3.17)$$

valamint igaz, hogy:

$$-\frac{v^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + g_n \qquad (3.3.18)$$

ahol az R áramvonal sugara.

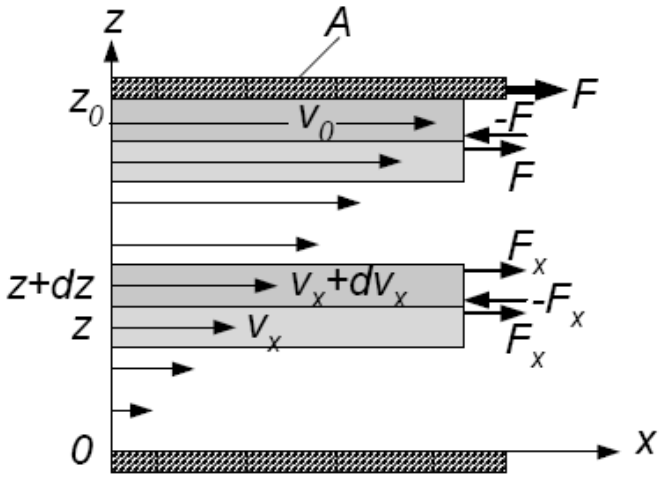
Súrlódásos áramlások tárgyalása előtt, definiáljuk a folyadékokban értelmezett súrlódást. Vegyünk két A felületű, párhuzamos síklapot, melyek közé vékony folyadékréteget helyezünk el. Az alsó lapot az xy síkban rögzítjük, a tőle z0 távolságban lévő felső lapot pedig x-irányban egyenletes v0 sebességgel mozgatjuk (3.3.3 ábra). Ehhez erőt kell kifejtenünk, ami a folyadékban fellépő belső súrlódási erő legyőzéséhez szükséges. Ha a fenti kísérletet különböző sebességekkel, lemeztávolságokkal és felületekkel elvégezzük, azt találjuk, hogy:

$$F = \mu \cdot \frac{v_0}{z_0} \cdot A \qquad (3.3.19)$$

ahol μ a dinamikus viszkozitás. A tapasztalat szerint ez az összefüggés általánosan is igaz:

$$F = \mu \cdot \frac{dv_x}{dz} \cdot A \tag{3.3.20}$$

Ez utóbbi a Newton-féle súrlódási (viszkozitási) törvény, melynek jelentősége, hogy segítségével kiszámítható többek között egy csőrendszer (pl. folyadékhűtés) áramlási ellenállása.



3.3.3. ábra – Súrlódás értelmezése folyadékokban.

A Newton féle viszkozitási törvény alapján definiálható az ún. csúsztató feszültség:

$$\tau_{zx} = \mu \cdot \frac{dv_x}{dz} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \tau_{xz} \tag{3.3.21}$$

Lényeges, hogy a fenti összefüggés csak a Newtoni folyadékokra igaz! Viszont a legtöbb folyadék ilyen a mérnöki gyakorlatban.

A súrlódásos áramlások leírásához induljunk ki az általános mozgásegyenletből, amely:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} + \bar{F} = \bar{g} + \frac{1}{\rho} \bar{\bar{\Phi}} \bar{\nabla} \tag{3.3.21}$$

ahol F az áramlás részecskéire ható eredő erő, $\bar{\bar{\Phi}}$ a feszültség tenzor:

$$\overline{\overline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{3.3.22}$$

és $\overline{\nabla}$ a nabla vektor: $\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}$ (3.3.23)

A feszültség tenzor főátlójában a nyíró feszültségek találhatók, amelyek állandó sűrűség mellett:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p \tag{3.3.24}$$

A legegyszerűbb súrlódásos áramlás esetén – ha a sűrűség állandónak tekinthető – a mozgásegyenlet komponens egyenletei a következők:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \\ \frac{dv_y}{dt} &= g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \upsilon\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) \\ \frac{dv_z}{dt} &= g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \upsilon\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

ahol a lokális és konvektív megváltozás:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} \tag{3.3.26}$$

és υ a kinematikai viszkozitás: $\upsilon = \frac{\mu}{\rho}$ (3.3.27)

A fenti egyenlet a megalkotóiról kapott általánosan ismert neve a Navier-Stokes egyenlet. Még egyszer hangsúlyozva, a Navier – Stokes egyenlet csak akkor érvényes, ha az áramló közeg sűrűsége közel állandó!

A mérnöki gyakorlatban azonban találkozhatunk olyan esettel is, hogy az áramló közeg sűrűsége nem tekinthető állandónak. (Pl. gázok áramlása vagy folyadékok áramlása nagy hőmérséklet gradienssel). A sűrűségváltozást az általános mozgás egyenletben (3.3.21) szereplő feszültség tenzor átalakításával vizsgálhatjuk:

$$\overline{\overline{\Phi}} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu div v & \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & -p + 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu div v & \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu div v \end{bmatrix} \quad (3.3.28)$$

Ha összehasonlítjuk a 3.3.22-es és a 3.3.28-as feszültség tenzorokat, megfigyelhető, hogy a sűrűség változás a nyíró feszültségekre van hatással. A 3.3.28-as kifejezés segítségével a mozgásegyenlet legáltalánosabb alakja súrlódásos áramlás esetén változó sűrűség mellett (csak az x komponens egyenletre szorítkozva) a következő:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \upsilon\left[2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial z}\right)\right] \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Ha összehasonítjuk a fenti kifejezést az állandó sűrűségű áramlást leíró Navier-Stokes egyenlettel (3.3.25), a következő eltérések tapasztalhatók:

- v_x második deriváltja dominánsabban (4/3-os szorzóval) szerepel az általános mozgásegyenletben.
- megjelennek a vegyes másodrendű deriváltak, 1/3-os szorzóval.

Az eddig tárgyalt egyenletekkel – bonyolultságuk ellenére is – csak lamináris áramlások írhatók le teljes pontossággal! A sebesség növelésével (vagy nagy sűrűségű közeg esetén) az áramlás turbulenssé válik, azaz az áramvonalak metszeni kezdik egymást.

A sebesség vagy a sűrűség kritikus értéke az ún. hasonlósági elmélet szerint egy dimenzió nélküli számmal (ún. Reynolds-szám) becsülhető meg. A Reynolds szám hengeres csőben:

$$R = \frac{\rho \cdot r \cdot v}{\eta} \tag{3.3.30}$$

ahol r az áramlási keresztmetszet sugara. Ha R értéke nagyobb, mint ~1200 az áramlás már turbulensnek tekinthető.

A turbulens áramlás viszonyai lényegesen különböznek a lamináristól, amelynek néhány gyakorlati jelentősége:

- gáz-szilárd határfelületen a hőleadási tényező nagyságrendekkel nagyobb turbulens áramlás esetén,
- a csövek áramlási ellenállása drasztikusan növekszik, ha bennük turbulens áramlás alakul ki (folyadékhűtés).

A turbulens áramlások vizsgálata az áramlástanon belül mára egy külön tudományággá fejlődött. A turbulens áramlások vizsgálatához – az előzőeken túlmenően – további módszerek is szükségesek, amelyeket a következő fejezetben ismertetünk.

3.3.2 Turbulens áramlási problémák és a CFD módszer

A 3.3.1 fejezetben kizárólag a lamináris áramlások matematikai leírásával foglalkoztunk, azonban a mérnöki áramlástani problémák nagy része a turbulens áramlásra vezethető vissza. Ilyenek például a nagysebességű gázáramlások, valamint a legtöbb folyadékáramlás (a relatíve nagy sűrűség miatt). A következőkben tekintsünk át néhány egyszerű példát az előző fejezetben definiált Reynolds szám segítségével.

Számítsuk ki a Reynolds számot egy 100km/h-val haladó 3m hosszú autó esetén:

$$\mathrm{Re} = \frac{Lv}{\upsilon} = \frac{3 \cdot 27.78}{1.5 \cdot 10^{-5}} = 5.5 \cdot 10^{6}$$

Majd egy 10km/h-val haladó 100m hosszú tengeralattjáróra:

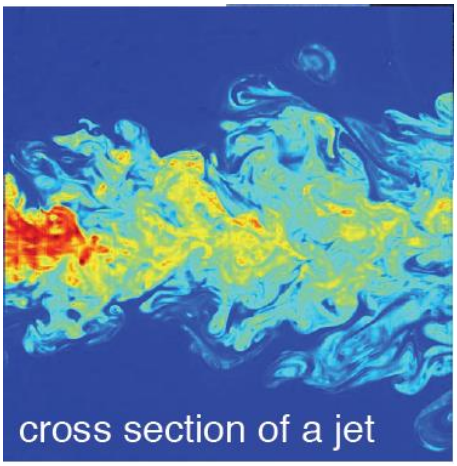
$$\mathrm{Re} = \frac{Lv}{\upsilon} = \frac{100 \cdot 2.78}{10^{-6}} = 2.78 \cdot 10^{8}$$

És végül 1m/s-al folyó vízre egy 1cm átmérőjű csőben:

$$\mathrm{Re} = \frac{Lv}{\upsilon} = \frac{0.01 \cdot 1}{10^{-6}} = 10^{4}$$

(A számítás során alkalmazott kinematikai viszkozitások: víz: 10-6 m2/s; levegő: 1.5x10-5 m2/s.) Látható, hogy mind a három egyszerű fenti példa turbulens áramláshoz vezet (emlékezzünk, hogy ha R értéke nagyobb, mint ~1200, akkor az áramlás turbulensnek tekinthető.)

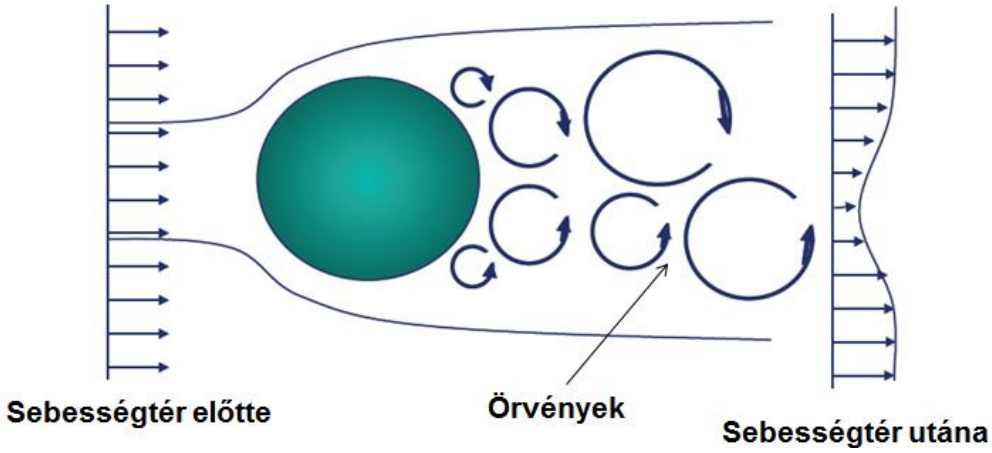
A turbulens áramlások szemléltetésére nézzük meg a 3.3.4 ábrát, ahol egy fúvókából kilépő áramlás sebességterét ábrázoltuk. Az ábrán a domináns áramlási irány megfigyelhető ugyan, de a diszkrét áramvonalak már nem (hasonlítsuk össze a 3.3.2 ábrával).



3.3.4. ábra – Fúvókából kilépő áramlás sebességtere.

A fent is prezentált „kaotikus” áramlási kép mellett a turbulens áramlások további sajátossága, hogy általában nagymértékben ingadoznak (időben még nagy elhanyagolások mellett sem stacionáriusak) és nehezen skálázhatók, azonban a legtöbb esetben az átlagmozgás (és a domináns áramlási irány) jól definiált, amit a legtöbb fizikai modell ki is használ.

A turbulens áramlások modellezésének alapja az áramlásban kialakuló örvények „viselkedésének” leírása, különböző szinteken (részletesen később). Az örvények kialakulására nézzünk meg egy nagyon egyszerű áramlási esetet, amikor laminárisan áramló folyadékba egy akadályt – jelen esetben egy gömböt –helyezünk (3.3.5 ábra). Az akadály mögött örvények alakulnak ki – az áramlás turbulensé válik – a gömb előtti homogén sebességtér a gömb után inhomogénné válik.



3.3.5. ábra – Áramlás egy gömb körül.

A fent már említett skálázási probléma gyakorlati jelentősége, hogy a legkisebb örvény és a hossz közti arány a következőképpen alakul:

Háromdimenziós esetben: $\frac{\delta}{L} \approx O(\mathrm{Re}^{-3/4})$

Kettődimenziós esetben: $\frac{\delta}{L} \approx O(\mathrm{Re}^{-1/2})$

Emiatt a turbulens problémák esetén, ha például Re=10, már minimum 10 rácspont kell legyen a modellünkben. Ez a turbulens áramlási modellek komplexitását nagyságrendekkel megnöveli, ha hasonló lamináris esetekhez hasonlítjuk. A 3.3.1 táblázatban összefoglaltuk, hogy hány rácspont lenne ideális egy turbulens áramlási modellben adott Reynolds számok esetén. A sok esetben milliós rácspont-szükséglet még a mai modern számítástechnikát is komoly feladat elé állítja, így a turbulens áramlások

numerikus modellezése – a relatíve nagy komplexitásuk miatt – csak az elmúlt 20 évben kapott lendületet.

3.3.1. táblázat – Rácspont szükséglet adott Reynolds számokhoz.

Re	**3D**	**2D**
1000	~300^3	~100^2
10000	~2000^3	~300^2
10000	~10000^3	~1000^3

A turbulens áramlások vizsgálatára manapság legelterjedtebb eszközrendszer az ún. ***CFD (Computional Flid Dynamics)*** módszerek. A CFD eszköztára három fő csoportra osztható:

- *RANS* (Reynolds Averaged Navier-Stokes) módszer: ennél a módszernél csak az átlagmozgást számítottuk, a fluktuációt modellezzük.
- *LES* (Large Eddy Simulations) módszer: ennél a módszernél a nagyobb örvényeket teljesen kiszámoljuk, a kisebbeket csak modellezzük.
- *DNS* (Direct Numerical Simulations) módszer: ennél a módszernél a teljes áramlási teret számítjuk, minden hossz és idő skálán.

A fenti módszerek komplexitása fentről lefelé haladva egyre növekszik. A DNS módszeré általában már olyan nagy, hogy szinte csak nagymértékben szegmentált „részáramlások” számítására használják, teljes áramlási terekre nem.

A következőkben mi csak a mérnöki gyakorlatban leginkább elterjedt ***RANS módszerre*** koncentrálunk. A RANS módszer esetén az átlagos mozgás számításához a Navier-Stokes egyenletek átlagolása szükséges. Ehhez a sebességet és a többi változót dekomponáljuk egy átlag és egy fluktuáló részre:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{a}' \tag{3.3.31}$$

ahol a nagybetűs rész az átlag, a vesszős pedig a fluktuáló rész. Definiáljunk hely, idő és általános átlagolást, amelyek mindegyike kielégíti a következő feltételeket (használjuk „<>” az átlagolás jeleként a következőkben):

$$\langle \boldsymbol{a} \rangle = \boldsymbol{A}$$
$$\langle \boldsymbol{a}' \rangle = 0$$
$$\langle \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \rangle = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \qquad (3.3.32)$$
$$\langle c\boldsymbol{a} \rangle = c\boldsymbol{A}$$
$$\langle \nabla \boldsymbol{a} \rangle = \nabla \boldsymbol{A}$$

A különféle átlagolási módszerek funkciója a következő:

- homogén turbulens áramlásra a hely szerinti átlagolás alkalmazható:

$$\langle \boldsymbol{a} \rangle = \int_0^L \boldsymbol{a} dx \qquad (3.3.33)$$

- Időben állandó turbulens áramlásra az idő szerinti átlagolás alkalmazható:

$$\langle \boldsymbol{a} \rangle = \int_0^T \boldsymbol{a} dt \qquad (3.3.34)$$

- Általános esetben pedig (ha az előző két feltétel egyike sem áll fenn), az általános átlagolás alkalmazandó:

$$\langle \boldsymbol{a} \rangle = \sum \boldsymbol{a}_r(x,t) \qquad (3.3.35)$$

A Navier-Stokes egyenlet vektoriális alakjából kiindulva:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \upsilon \nabla^2 \boldsymbol{u} \qquad (3.3.36)$$

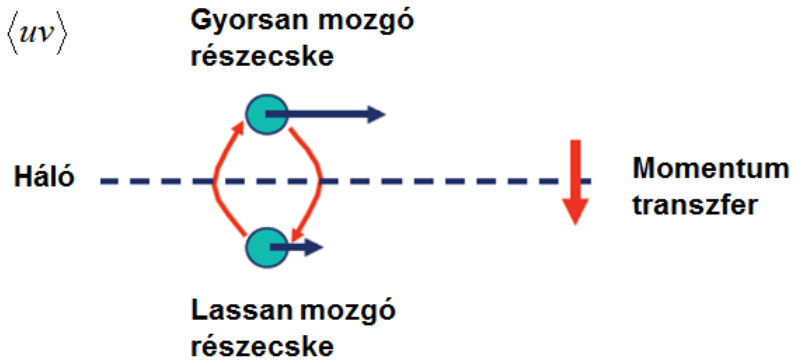
ahol u a sebesség x komponense. Az előzőekben tárgyaltak szerint dekomponáljuk a sebességet és a nyomást:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \nabla \boldsymbol{U}\boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \upsilon \nabla^2 \boldsymbol{U} + \langle \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}' \rangle \qquad (3.3.36)$$

ahol az ún. Reynolds stress tenzort a következőképpen értelmezzük:

$$\langle \boldsymbol{u'u'} \rangle = \begin{vmatrix} \langle u'u' \rangle & \langle u'v' \rangle & \langle u'w' \rangle \\ \langle u'v' \rangle & \langle v'v' \rangle & \langle v'w' \rangle \\ \langle u'w' \rangle & \langle v'w' \rangle & \langle w'w' \rangle \end{vmatrix} \tag{3.3.37}$$

A Reynolds stressz fizikai értelmezése a gyorsan és lassan mozgó részecskék közötti momentum transzfer az áramló közegben (3.3.5 ábra)



3.3.6. ábra – A Reynolds stressz tenzor értelmezése.

A turbulens áramlások vizsgálatának fő problémája, hogy csak egy egyenlettel rendelkezünk az átlagsebességre (Navier-Stokes), ezért a Reynolds stress tenzort is ahhoz kellene kapcsolni (lásd 3.3.36-os kifejezés). Erre sajnos nincs rigorózus megoldás.

A dolog megoldásához vezessük be a „turbulens örvény viszkozitást”:

$$\langle \boldsymbol{u'u'} \rangle_{ij} = -\upsilon_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \tag{3.3.38}$$

A 3.3.38-as kifejezés megoldására több módszer is létezik, amelyeket az alkalmazott változók száma alapján csoportosítunk.

Nullaváltozós megoldások közül néhány a teljesség igénye nélkül:

Prandtl kevert hossz: $\upsilon_T = l_0^{\,2} \left| \frac{dU}{dy} \right|$ (3.3.39)

Smagorinsky model: $\upsilon_T = l_0^{\,2}\left(2\overline{S_{ij}}\,\overline{S_{ij}}\right)^{1/2}$; $\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$ (3.3.40)

Baldvin-Lomaz model: $\upsilon_T = l_0^{\,2}\left(2\overline{\omega_{ij}}\,\overline{\omega_{ij}}\right)^{1/2}$; $\overline{\omega_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$ (3.3.41)

Egyváltozós megoldás: $\upsilon_T = k^{1/2} t_0$ (3.3.42)

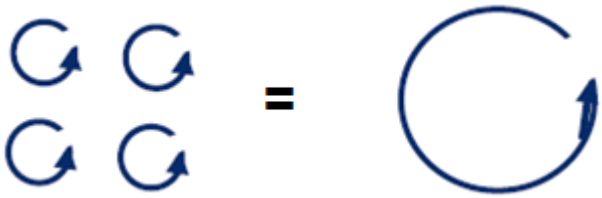
Ahol k egy újabb változó, aminek az időbeli és hely szerinti változását egy újabb egyenlettel írjuk le.

A null és egyváltozós megoldások problémája az, hogy az l_0 és t_0 értékek nem univerzálisak, hanem általában tapasztalat alapján becsült értékek. Így a RANS módszer megfelelő alkalmazásához minimum két „új” változó bevezetése szükséges.

Két változós megoldás: A turbulencia karakterizálásához megfelelő lenne a sebesség fluktuáció nagyságrendjének meghatározása. Izotróp turbulencia esetén erre a célra a turbulens kinetikus energia használható:

$$k = \frac{1}{2}\left(\langle u'u'\rangle + \langle v'v'\rangle + \langle w'w'\rangle\right) \quad (3.3.43)$$

Sajnos turbulens kinetikus energia nem teszt különbséget a kicsi és a nagy örvények között. Energia szempontjából több kis örvény egyenlő lehet egy naggyal (3.3.7 ábra).



3.3.7. ábra – Kis és nagy örvények.

Így a kis és nagy örvények megkülönböztetésére egy plusz változó szükséges! A kis örvények jellegzetes tulajdonsága, hogy sokkal hamarabb

eltűnnek, mint a nagyok, ezért a jellemzésükre megfelelő az ún. „turbulens disszipációs ráta”:

$$\varepsilon = \upsilon \left\langle \frac{\partial u'_i \, \partial u'_i}{\partial x_j \partial_j} \right\rangle \tag{3.3.44}$$

A fent definiált két „új” változó segítségével a turbulens örvény viszkozitás a következőképpen alakul:

$$\upsilon_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{3.3.45}$$

ahol C_μ egy konstans. Az előzőekben tárgyalt módszer elnevezése: ***k-ε modellt.***

A korábbiakban felírt RANS egyenlet a k-ε módszer segítségével a következőképpen módosul:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \nabla \boldsymbol{U}\boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \left(\upsilon + \upsilon_T\right)\nabla^2 \boldsymbol{U} \tag{3.3.46}$$

Általános formában a k és ε változók egyenletei a következők:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\nabla k &= \boxed{\nabla \cdot D_k \nabla k + keletkezés - disszpáció} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\nabla \varepsilon &= \boxed{\nabla \cdot D_\varepsilon \nabla \varepsilon + keletkezés - disszpáció} \end{aligned} \tag{3.3.47}$$

amelyben a téglalappal kiemeltük a modellezendő részeket. A k-ε modell teljes matematikai alakja a következő:

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= \nabla\left(\upsilon + C_2\upsilon_T\right)\nabla k - \tau_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \nabla\cdot\left(\upsilon + C_3\upsilon_T\right)\nabla \varepsilon + C_4\frac{\varepsilon}{k}\tau_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_5\frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \tag{3.3.48}$$

ahol $\tau_{ij} = \langle u_i' u_j' \rangle = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \upsilon_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ (3.3.49)

és az együtthatók: $C_\mu = 0.09; \quad C_2 = 1; \quad C_3 = 0.769; \quad C_4 = 1.44; \quad C_5 = 1.92$.

A fenti együtthatók elég általánosan alkalmazhatók. Speciális problémák esetén előfordul, hogy szükséges a méréssel történő meghatározásuk, illetve pontosításuk. A 3.3.48-es egyenletek jobb oldali tagjainak a fizikai értelmezése a következő:

- első tag: turbulens transzport
- második tag: örvények keletkezése
- harmadik tag: örvények disszipációja

A k-ε modell segítségével nem csak az anyag, hanem egyidejűleg az energia transzport folyamatok is jól leírhatók. A mérnöki gyakorlatban gyakoriak az ilyen jellegű feladatok, mint például a kényszer konvekciós hűtés, folyadékhűtés, stb.

Turbulens áramlásban az energia transzport teljesen analóg módon megoldható:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{u} T = \alpha \nabla^2 T$$
$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{U} \langle T \rangle = \alpha \nabla^2 \langle T \rangle - \nabla \langle \boldsymbol{U} T \rangle \qquad (3.3.50)$$

ahol $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{u}'; \quad T = \langle T \rangle + T'$ (3.3.51)

és α a termikus diffúziós állandó. A gradiens transzport hipotézisre támaszkodva általában alkalmazható a következő közelítés:

$$\langle \boldsymbol{U} T \rangle \approx \alpha_T \nabla \langle T \rangle \qquad (3.3.52)$$

A k-ε modell alkalmazása során a modell viszonylagos egyszerűsége miatt néhány problém felmerülhet:

- Az egyenletek az áramlás bizonyos régióiban „merevvé” válhatnak, ami miatt nagyon kicsi időlépés szükséges. (ez a jelenség implicit sémák alkalmazásával orvosolható.)
- A valóságban, a falak közelében k nullához tart. A szimulációkban ez a falhoz közeledve történik, amit a rácsozás általában nem tud lekezelni. (ez a jelenség az ún. „fal függvény” alkalmazásával orvosolható a dolog.)

A fentiekben ismertetett k-ε modell mellett más kétváltozós RANS módszerek is léteznek. A teljesség igénye nélkül néhány ilyen: RNG k-ε, nem lináris k-ε, k-ω, k-l_0, k-enstropy, stb..

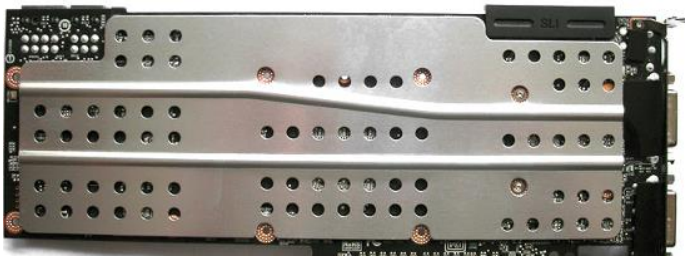
3.3.3 Áramlástani hűtési megoldások

Az elektronikus áramkörökben és az elektronikai technológiában az áramlástannak leginkább a készülékek hűtésében van jelentős szerepe. (Ez alól talán csak a kényszer konvekciós reflow kemencék a kivételek.) Az áramlástani modellezés szerepe a fent tárgyaltakban:

- A térfogategységre vonatkozó disszipált teljesítmény rohamos növekedése,
- hővezető anyagok:
    - fejlesztésük nem jellemző,
    - nem ez a szűk keresztmetszet,
- *hűtési megoldások:*
    - *léghűtés: az ár és a felépítés bonyolultsága háttérbe szorul a teljesítmény mellett,*
    - *folyadékhűtés elterjedése, továbbfejlesztése,*
    - *kompresszoros hűtés,*
    - *fázisátalakulásra épülő, aktív hűtés,*
- funkciók összevonása a készüléken belül,
- modellezés alkalmazása (ökölszabályok helyett).

A fenti felsorolásból a következőkben a területünket leginkább érintő hűtési megoldásokra koncentrálunk. Manapság a legegyszerűbb hűtési megoldás a hűtőlemezek (3.3.8 ábra) és a hűtőbordák (3.3.9 ábra) alkalmazása. A

hűtőlemez általában több feladatot is ellát (főleg a kompakt készülékeknél), sőt, sok esetben a hűtés nem is elsődleges szerepe, hanem egy árnyékoló, vagy szerkezeti elemet használnak hűtésre is.



3.3.8. ábra – Hűtőlemez.

A hűtőbordával történő hűtés megvalósításának szempontjai a következők:

- a hőt jellemzően kis felületről kell elvezetni,
- lehetőleg nagy felületen kell leadni,
- termikus ellenállást minimalizálni kell,
- a megoldás legyen gazdaságos (anyag, megmunkálás),
- hőleadást mesterséges konvekcióval javítani lehet.

A 3.3.8-as ábrán egy klasszikus hűtőbordát mutatunk. A „klasszikus” hűtőbordák két fő részből állnak (újabb bordáknál is megtalálhatjuk ezt a két részt, ha nem is ilyen formában): a talpból, amely a hűtendő elemhez kapcsolódik, és a lamellákból, amelyek a hőt leadják a gáz/folyadék felé.

3.3.9. ábra – Klasszikus hűtőborda.

A hűtőbordák tervezésénél a következő „pro-kontra” tényeket kell figyelembe vennünk a lamellákra nézve:

- nagyobb felület => nagyobb hőleadás,
- nagyobb felület => nagyobb hőellenállás,
- kisebb vastagság => nagyobb felület,
- kisebb vastagság => nagyobb hőellenállás,
- kisebb vastagság => nehezebb megvalósíthatóság.

valamint a talpra nézve:

- mérete igazodik a hűtendő felülethez,
- vastagabb talp => nagyobb hőkapacitás, jobb hőelosztás
- vastagabb talp => nagyobb hőellenállás.

A felsorolásokból látható, hogy a talp és a lamellák esetében is a különböző szempontok ellentmondásba kerülhetnek egymással. A hűtőbordák megjelenési formái rendkívül változatosak, ez köszönhető egyrészt annak, hogy adott követelményt kielégítő megoldás végtelen sok lehet, másrészt annak, hogy egy adott hűtőborda egyetlen adott hőáram, hőmérséklet, gáz (nyomás, áramlási tér…) esetén működik optimálisan.

A hűtőlemezek és bordák alapanyaga általában alumínium vagy réz. Mindkét anyagnak vannak előnyei és hátrányai is, ezért nem lehet kijelenteni, hogy bármelyik jobb lenne a másiknál.

Az alumínium tulajdonságai:

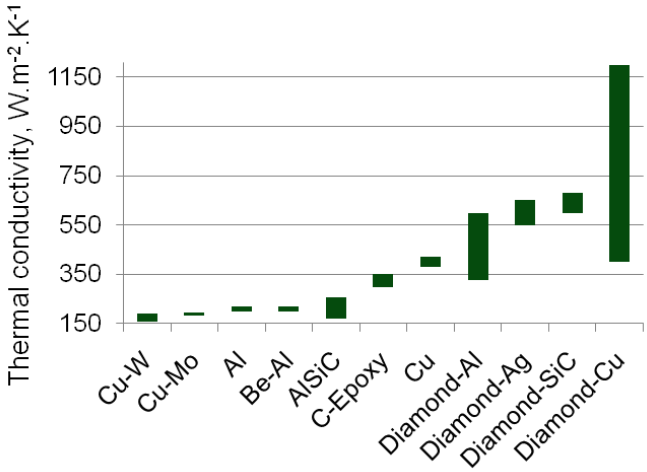
- olcsó,
- könnyen megmunkálható,
- jó hőleadás.

A vörösréz tulajdonságai:

- magasabb ár,
- nehezen megmunkálható,
- jobb hővezetőképesség,
- rosszabb hőleadás,

A fenti két anyag mellett más anyagokból is lehet bordát készíteni, pl. ezüstből, fémhabból, szénszálas kompozitokból, műgyémántból, azonban a jelentősen magasabb költségek miatt tömegtermékbe ilyen borda csak

elvétve kerül beszerelésre. A fenti anyagok hővezető képességét a 3.3.10-es ábrán foglaltuk össze.

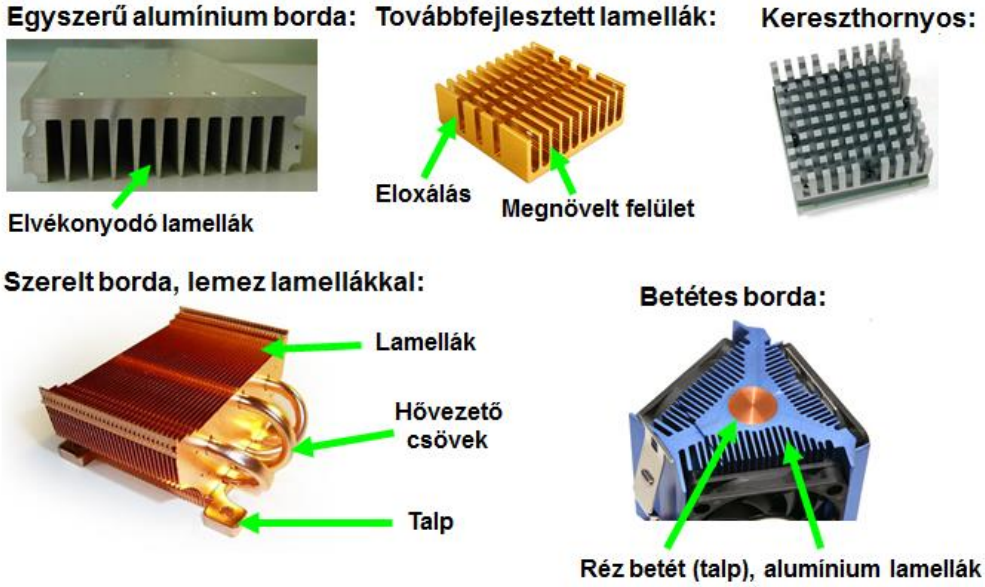


3.3.10. ábra – Hűtőborda anyagok.

A bordák hőleadási tényezőjét ventilátorok segítségével növelhetjük (ezzel párhuzamosan a hőszállítás mértéke is jelentősen nő, a két jelenség nem összekeverendő!). Természetes konvekció esetén a hőleadási tényező értéke ~20 W/m^{2}K, ventilátorral ez ~200 W/m^{2}K -ig is növelhető.

A már említett okon kívül ebbe (főleg a PC-k esetében) a divatirányzatok is beleszólnak, és előfordul, hogy a borda külleme a termikus tulajdonságok rovására megy. A legegyszerűbb bordák alumíniumból készülnek, a jobb minőséget az elvékonyodó bordákról lehet megismerni. A gyártó megadja a borda termikus ellenállását a hossz függvényében, ezt figyelembe véve lehet legyártani a megfelelő méretet. A borda hőleadását a lamellák felületének megnövelésével és a felület eloxálásával lehet javítani, ez természetesen növeli a borda árát. A vízszintes talppal beszerelt bordáknál indokolt a kereszthornyok készítése, szintén az ár rovására. Ezek a bordák egy tömbből készülnek a termikus ellenállás minimalizálása érdekében, viszont így bonyolultabb alakzatok, vagy vékony lamellák kialakítása nem lehetséges. Vékony lamellát kialakítani lemezből lehet, ezt viszont már csak csavarkötéssel lehet a hűtőborda tömbjéhez szorítani. A felület ezzel növekszik, a borda hőellenállása viszont nő. A szerelt bordák között elterjedtek az ún. betétes bordák, melyek a réz és az alumínium előnyét

egyesítik: a borda talpa és belső része rézből, külső része alumíniumból készül. Megfelelő gyártástechnológiával biztosítható a két anyag között a kis termikus ellenállás, azonban az ilyen borda a tömör réznél is magasabb árral rendelkezik. A 3.3.10 ábrán a fentiekben tárgyalt, különféle hűtőbordákat prezentáljuk.



3.3.10. ábra – Különböző hűtőbordák.

A fentiekben tárgyalt hűtőbordás hűtésnél modernebbek és nagyobb hatásfokúak, az ún. ***folyadékhűtési*** megoldások. A folyadékhűtések kifejlesztésének fő motivációját két tény szolgáltatta:

1. A folyadékok fajhője nagyobb a gázokénál, ezért azonos térfogatú folyadék nagyobb hőmennyiséget képes elszállítani (példaként a levegő fajhője : 0,001 $J.cm^{-3}.K^{-1}$, míg a vízé: 4 $J.cm^{-3}.K^{-1}$).
2. A folyadékok hővezetési tényezője nagyobb a gázokénál (levegő fajlagos hővezetése: 0,026 $W.m^{-1}.K^{-1}$, míg vízé: 0,61 $W.m^{-1}.K^{-1}$), ezért a határfelületek hőleadási tényezője folyadékhűtés esetén nagyobb (levegőben: 20…200 $W.m^{-2}.K^{-1}$, vízben: 500…10000 $W.m^{-2}.K^{-1}$).

A folyadékhűtések fő jellemzői:

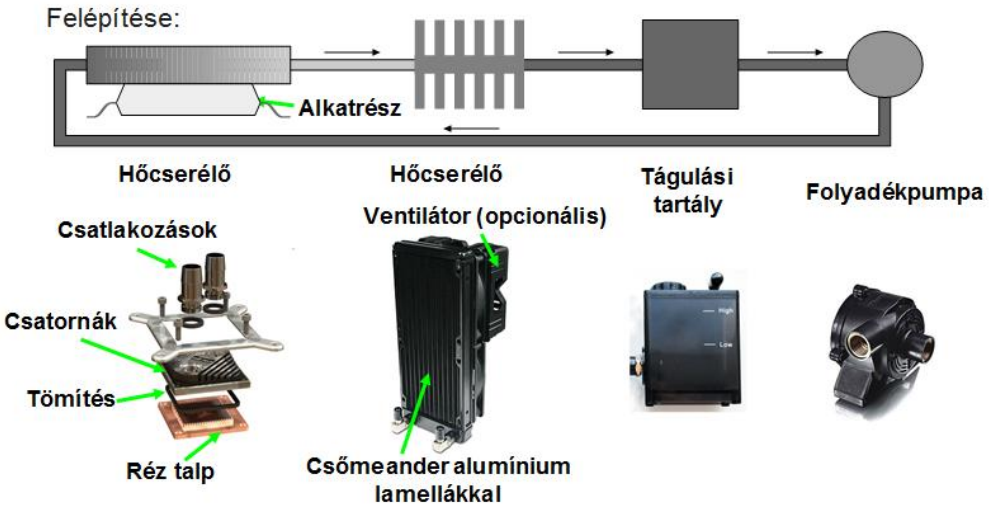
- nagy hűtési teljesítmény és alacsonyabb hőmérséklet érhető el (léghűtéshez képest),

- alacsony működési zaj,
- hosszú élettartam, megbízható működés, zárt rendszer (környezetből szennyezés nem jut be),
- megvalósítása, gyártása körülményesebb,
- mérete, tömege nagy, rázás-, ütésállósága kicsi.

A folyadékhűtésnek két fő megvalósítási formája létezik: a *indirekt* és az *direkt* folyadékhűtés.

Indirekt folyadékhűtés esetén a hűtőfolyadék közvetlenül nem érintkezik a hűtött elektronikus alkatrészekkel. A rendszer három fő elemből áll (3.3.11 ábra), amelyek:

- a hőcserélő, amely biztosítja a hűtött alkatrészről a hő átadását a folyadéknak majd a környezet felé egy hűtőrendszer segítségével (lényeges a folyadék és az alkatrész közötti nagyon jó hőátadás biztosítása),
- a tágulási tartály, amely lehetővé teszi a felmelegedett folyadék tágulását a zárt rendszerben,
- és a folyadékpumpa, amely a folyadékot keringeti a zárt rendszerben és ezáltal biztosítja a hő elszállítását az alkatrésztől a hűtőrendszer felé.



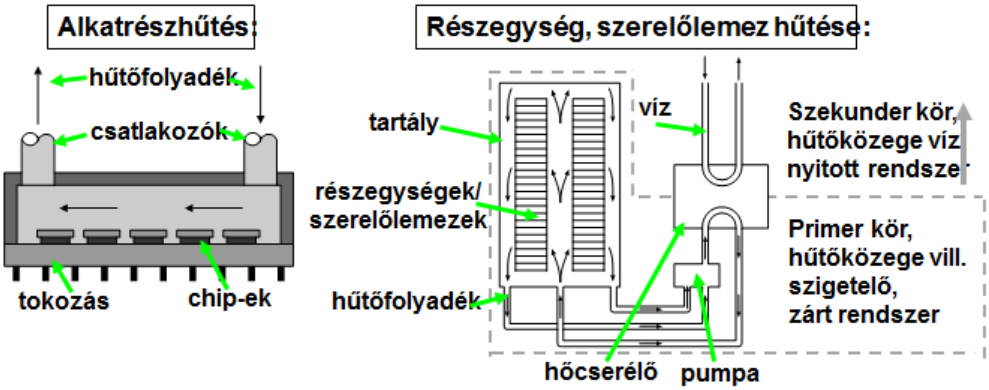
3.3.11. ábra – Indirekt folyadékhűtés megvalósítása.

Az indirekt hűtés az elmúlt években a nagy teljesítményű, professzionális készülékekből (pl. szuperszámítógépek, kapcsolóközpontok) eljutott a tömegtermékekbe is (pl. PC). Felhasználói szempontból a legnyilvánvalóbb előnye az alacsony működési zaj. Megvalósítása – mivel a rendszer alkotóelemei tömegtermékké váltak – viszonylag egyszerű (a következőkben bemutatásra kerülő direkt hűtéshez képest).

Direkt folyadékhűtés esetén a hőcserélő elhagyásával a hűtőfolyadék közvetlen érintkezésbe kerül a hűtött alkatrészekkel. A rendszer jellemzői, hogy:

- a közvetlen érintkezés miatt az alkatrészek és a hűtőfolyadék között a termikus ellenállás drasztikusan csökken,
- a közvetlen érintkezés miatt a hűtőfolyadék csak elektromosan szigetelő lehet,
- a rendszer megvalósítása rendkívül körülményes.

A 3.3.12 ábrán két példával illusztráljuk a direkt folyadékhűtés működését.



3.3.12. ábra – Direkt folyadékhűtés megvalósítása alkatrész és szerelőlemez hűtése esetén.

A direkt folyadékhűtés jelenleg csak professzionális, nagyteljesítményű készülékekben található meg a megvalósítás nehézségei miatt. Alkatrészhűtés esetén az alkatrésztok speciális kialakítást igényel, az ilyen tokozás nem tömegtermék. A részegységek/szerelőlemezek hűtése esetén a pluszban alkalmazott hőcserélő (3.3.12) jelentősége az, hogy a megnövekedett hűtendő térfogat ellenére a hűtőközeg mennyisége

csökkenthető legyen. Mindkét esetben problémát jelent a megfelelő minőségű hűtőközeg, melynek nagyon jó villamos szigetelő tulajdonságokkal kell rendelkeznie, esetleges vezető szennyeződést csak nagyon kis arányban tartalmazhat. A rendszer környezettől való szigetelése nagy fontossággal bír, mert általában a hűtőközegek vízmegkötő képessége nagy, a víztartalom pedig drasztikusan rontja szigetelőképességüket.

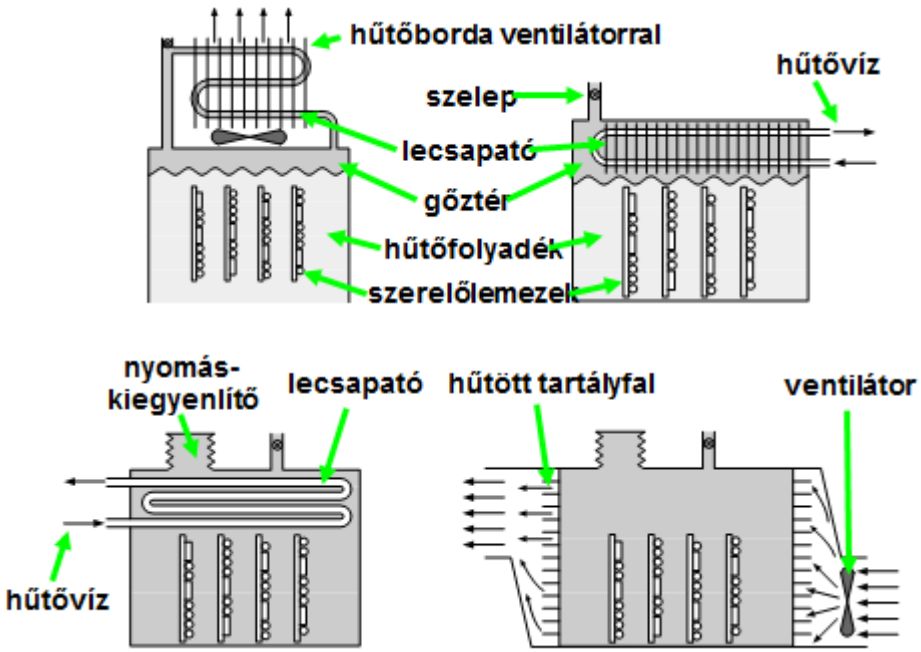
A folyadékhűtéseknél még nagyobb hatásfokot lehet elérni az ún. ***fázisátalakulásos*** hűtés alkalmazásával. Kifejlesztésük motivációját az adta, hogy a folyadékok elforralásával nagyobb hőt lehet elvonni, mint az áramoltatásukkal, például 1 kg víz 20-100°C-ra melegítése 0,335 MJ energiát igényel, még az elforralása 2,26 MJ energiát igényel.

A fázisátalakulásos hűtés megvalósítási lehetőségei a következők:

- direkt:
    - folyadéktartály gáztérrel:
        - külső lecsapatással,
        - belső lecsapatással,
    - folyadékkal feltöltött tartály:
        - lecsapatóval,
        - hűtött fallal.
- indirekt (heat pipe, tömegtermékekben a legelterjedtebb).

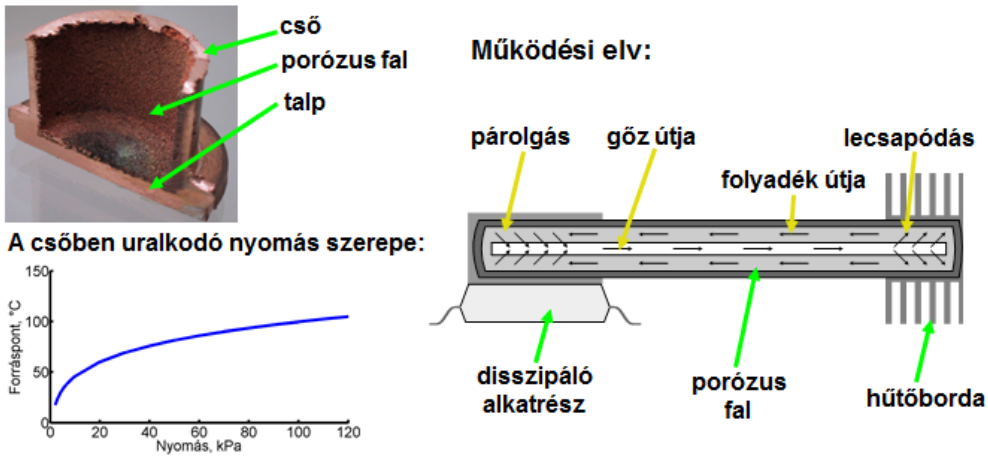
A 3.3.13 ábrán a direkt megvalósítási lehetőségeket illusztráljuk fentről lefelé és balról jobbra: folyadéktartály gáztérrel és külső lecsapatással; folyadéktartály gáztérrel és belső lecsapatással; folyadékkal feltöltött tartály és lecsapatóval; folyadékkal feltöltött tartály és hűtött fallal.

A direkt verziók megvalósítása azonban rendkívül körülményes, ezért nem mondható elterjedtnek még a professzionális készülékek esetében sem. A nyomás alatt lévő tartállyal rendelkező (3.3.13 alsó ábrák) megoldások nem tévesztendők össze a folyadékhűtéssel, ugyanis ebben az esetben a folyadék forrásba jön, a hőt a gyorsan mozgó buborékok szállítják. A megfelelő hűtőközeg megtalálása még a direkt folyadékhűtésnél is nehezebb feladat, mert ebben az esetben a megfelelő forráspontot is biztosítani kell (ami bizonyos határok között a nyomással is szabályozható).



3.3.13. ábra – Direkt fázisátalakulásos hűtési megoldások.

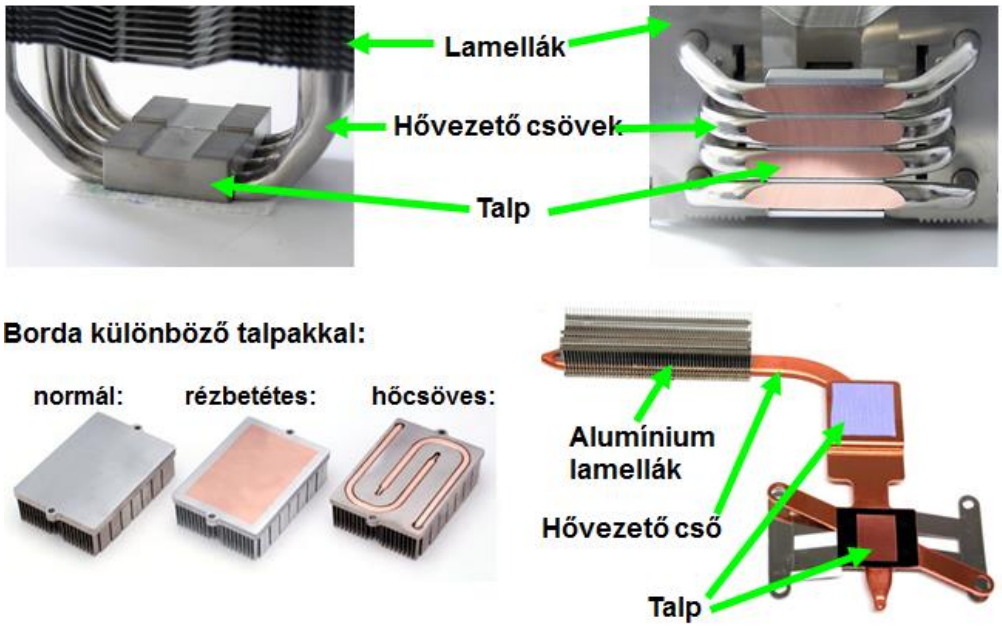
Ellentétben a direkt fázisátalakulásos hűtéssel, az *indirekt* megoldás nagy népszerűségnek örvend. A fázisátalakulásos hűtés indirekt, kompakt megvalósítási formája a hővezető cső (ún. „heat pipe”), mely népszerűségét a rendkívül nagy hővezető képességének és az ehhez mérten egyszerű kialakításának és alacsony árának köszönheti.



3.3.14. ábra – Az indirekt fázisátalakulásos (heat pipe) hűtés működése.

Az eszköz működését a 3.3.14 ábra illusztrálja. Az eszköz egy réz csőből (melynek belső falát maratással porózussá teszik), az egyik végén elhelyezett talpból és a másik oldalra szerelt hűtőbordából áll. A csőben a légkörinél alacsonyabb nyomás uralkodik, mivel a nyomás csökkenésével csökken a víz forráspontja (lásd a grafikonon), és kis mennyiségű vizet tartalmaz. A talp melegítése esetén a víz elpárolog (ezáltal jelentős hőt von el), a gőz végighalad a csövön, a bordánál lecsapódik, a víz pedig a porózus felületen visszaszivárog a talphoz.

A rendszer hővezetőképessége 100…1000-szer akkora, mint a rézé, és jelenleg ismert már a flexibilis csővel szerelt változata is. A heat pipe leggyakrabban két formában jelenik meg: hűtőbordákban a talp és a tömb kiváltásaként, vagy klasszikus formájában, ha egy készülékben kis helyen, nagyobb távolságra kell hőt elvezetni (pl. notebook). A 3.3.15 ábra különféle heat pipe alkalmazásokat illusztrál.



3.3.15. ábra – Különféle heat pipe alkalmazások.

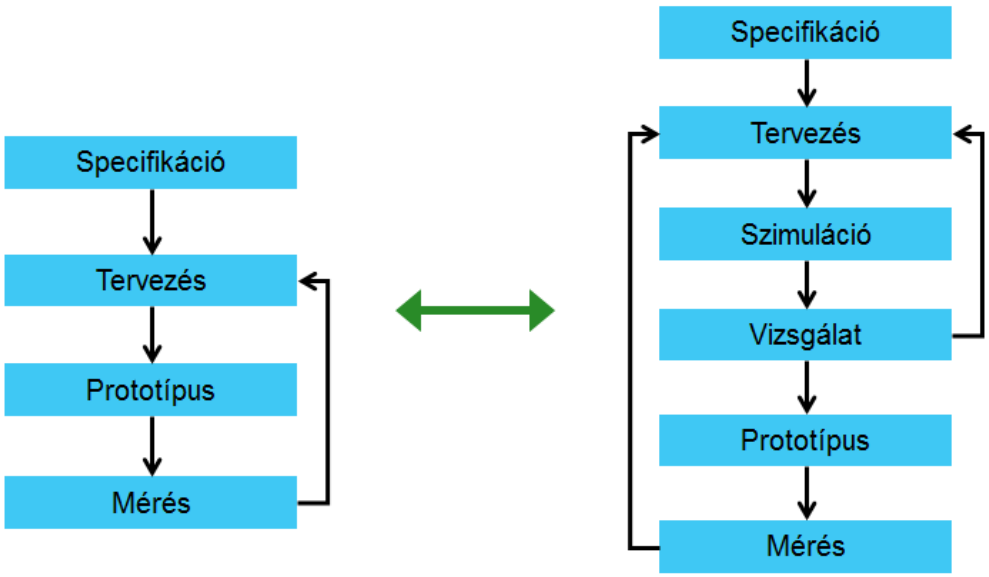
A 3.3. fejezet ellenőrző kérdései:

1. Adja meg az áramlási problémák tipikus csoportosítási lehetőségeit.
2. Definiálja a kontinuitási tételt!
3. Mit jelent egy áramlási jellemző lokális és konvektív megváltozása?
4. Hogyan írható le a stacionárius súrlódásmentes áramlás?
5. Hogyan írható le az instacionárius súrlódásmentes áramlás?
6. Hogyan írható le a súrlódásos áramlás állandó sűrűség mellett?
7. Hogyan írható le a súrlódásos áramlás változó sűrűség mellett?
8. Ismertesse a turbulens áramlási problémát és a CFD módszerek lényegét!
9. Mutassa be a RANS módszert!
10. Ismertesse a turbulens örvény viszkozitást és a k-ε modell lényegét!
11. Hidrodinamika szerepe az elektronikai készülékek működésében, modellező/tervező eszközök megjelenésének okai.
12. „Klasszikus” hűtőborda tervezési szempontjai.
13. Folyadékhűtés jellemzői, megvalósítási formái.
14. Fázisátalakulás jelenségére épülő hűtés jellemzői, megvalósítási formái.

3.4. Áramkörök modellezése

Az áramkörök tervezésével és modellezésével foglalkozó szoftver eszközök már a számítástechnika hőskorában megjelentek és a rohamosan növekvő igények miatt mára már igen változatos skálán találunk magas szinten automatizált tervező és szimulációs rendszereket. Léteznek olyan szintézis programok is, amelyek csak egy-egy áramkör kategória alkalmazhatók, valamint emellett teljes szimulációs program családok is.

Az áramköri szimulációk helyét egy áramkör megvalósítása során a 3.4.1 ábrán szemléltetett, jobb oldali „process flow” jelöli. (Baloldalon a klasszikus – szimulációt modellező – megvalósítási folyamat látható). Figyeljük meg, hogy az áramköri szimulációk beiktatásával egy újabb visszacsatolási lehetőség keletkezett az áramkörök tervezése során, ami nagy jelentőséggel bír.



3.4.1. ábra – Áramköri szimuláció helye az áramköri megvalósítás során.

Ugyanis ha még a költséges prototípusgyártás előtt kapunk visszajelzést a készülő áramkör működéséről és esetleges hibáiról, akkor jelentős költséget takaríthatunk meg.

Az áramköri szimulációs programok történetének főbb mérföldkövei a következők:

- 1960-as évek vége, Berkeley egyetem: CANCER (Computer Analysis of Nonlinear Circuits, Excluding Radiation),
- 1970-es évek eleje: SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis),
- 1970-es évek közepe: SPICE 2, és később további különböző SPICE implementációk,
- 1984: első PC-s verzió megjelenése.

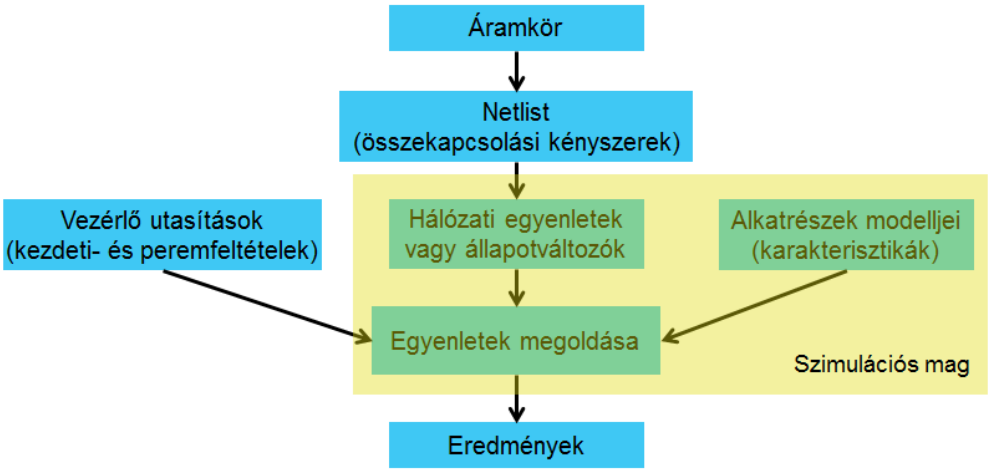
Az áramköri szimulációkat több szempont szerint is szokás csoportosítani. Lehetséges csoportosítás az áramkör megvalósulása szerint:

- Áramkör vizsgálata megépítés előtt:
    - áramkör felépítése,
    - alkatrészek kiválasztása.
- Meglévő áramkörök működési vizsgálata különböző körülmények között:
    - hőmérséklet,
    - tolerancia,
    - frekvencia,
    - zaj,
    - stb…

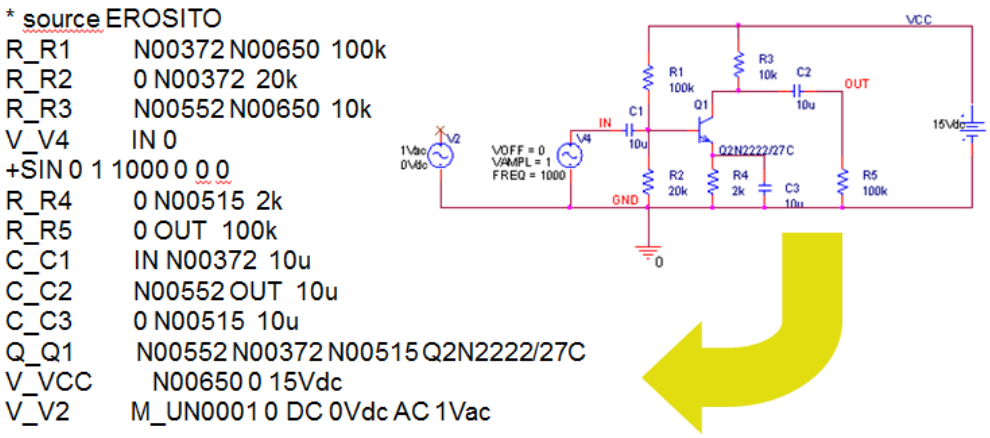
Az áramköri szimulációk fontosabb típusai a funkció szerinti csoportosításnak megfelelően:

- munkapont számítása,
- transzfer karakterisztika,
- érzékenység analízis,
- tranziens analízis,
- torzítás számítása,
- paramétervizsgálat,
- statisztikai analízis,
- kisjelű átviteli függvény számítása.

A 3.4.2 ábrán szemléltetjük az áramköri modellező rendszerek elvi felépítését. A modellezendő áramkörben először a Netlist segítségével megvizsgáljuk az összekapcsolási kényszereket (3.4.3 ábra), majd a felbontott áramkörből generáljuk az állapotváltozókat és a hálózati egyenleteket. Ezután következik az egyenletek megoldása, amely lépés további bemenő paraméterei: az alkalmazott alkatrés modellek, a kezdeti feltételek és peremfeltételek (pl. hőmérséklet, terhelés, stb.).



3.4.2. ábra – Áramköri szimuláció helye az áramköri megvalósítás során.



3.4.3. ábra – Netlist előállítása.

A 3.4.2. ábrán látható, hogy a Netlist elkészítése, valamint a vezérlő utasítások (kezdeti és peremfeltétek) általában nem képezik az áramköri

modellező rendszer szerves részét. (Netlist például az összes áramkörtervező rendszer segítségével generálható, amivel aztán a modellező rendszerek képesek dolgozni.)

Az alkalmazható alkatrész modelleket a következő csoportokba soroljuk:

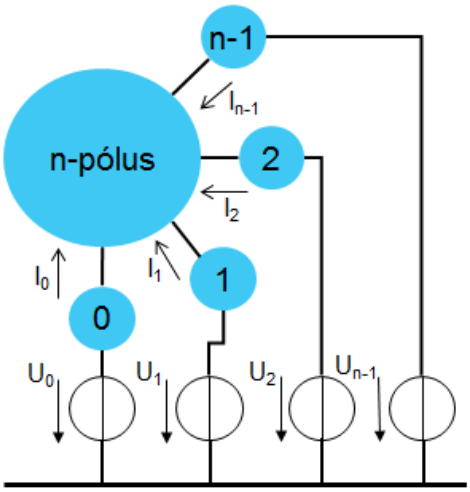
- Passzív elemek:
  - koncentrált paraméterű modellek: R, L, C,
  - elosztott paraméterű modellek: pl. tápvonal,
- generátorok:
  - feszültséggenerátor,
  - áramgenerátor,
- aktív, félvezető elemek:
  - dióda,
  - bipoláris tranzisztor,
  - térvezérlésű tranzisztor.

A rendelkezésünkre álló megoldási módszerek a következők:

- Csomóponti potenciálok módszere: amely során a hálózat csomóponti feszültségeit egy választott referenciához képest vizsgáljuk. A módszer előnye, hogy egyszerűen és könnyen előállítható egyenletekre vezet, viszont az ismeretlenek száma nagy.
- Hurokáramok módszere: az előzővel analóg, csak nem a csomópontokat, hanem a hálózat ágaiban folyó áramokat vizsgáljuk.
- Állapotváltozók módszere: az állapotváltozókat vizsgáljuk (pl. kapacitások töltése, induktivitások fluxusa, stb). A módszer implementálás nehezebb ez előbbieknél, viszont az ismeretlenek száma jóval kevesebb.

A következőkben tekintsük át az összekapcsolási kényszerek és hálózati egyenletek kezelését. Nézzük meg a 3.4.4 ábrán látható hálózatot. A hálózatot leíró egyenletet alakítsuk át a következő mátrixos alakra:

$$I_j = \sum_{k=0}^{n-1} Y_{jk} \cdot U_k \quad \rightarrow \quad \underline{I} = \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{U} \tag{3.4.1}$$



3.4.4. ábra – Példahálózat 1.

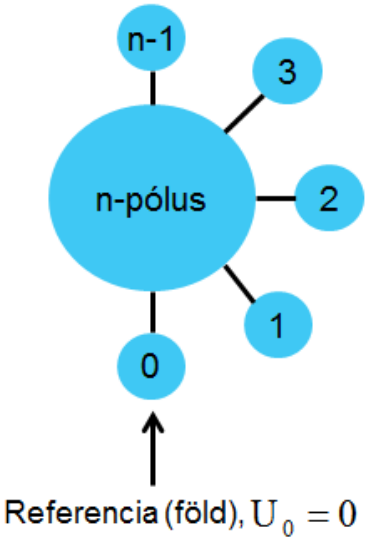
3.4.1-ben Y az ún. adminttanciamátrix, ami tartalmazza a lineáris tagokat és a passzív n-pólus áramait (ha létezik):

$$\begin{aligned} I_0 &= Y_{00} \cdot U_0 + Y_{01} \cdot U_1 + \ldots + Y_{0,n-1} \cdot U_{n-1} \\ I_1 &= Y_{10} \cdot U_0 + Y_{11} \cdot U_1 + \ldots + Y_{1,n-1} \cdot U_{n-1} \\ &\ldots \\ I_{n-1} &= Y_{n-1,0} \cdot U_0 + Y_{n-1,1} \cdot U_1 + \ldots + Y_{n-1,n-1} \cdot U_{n-1} \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Majd állítsuk elő a definit admittanciamátrixot ((M-1) sor és oszlop) a 3.4.5 ábrán látható módon:

$$I_j = \sum_{s=1}^{n-1} Y_{js} \cdot U_s \tag{3.4.3}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2 + \ldots + Y_{1,n-1} \cdot U_{n-1} \\ I_2 &= Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2 + \ldots + Y_{2,n-1} \cdot U_{n-1} \\ &\ldots \\ I_{n-1} &= Y_{n-1,1} \cdot U_1 + Y_{n-1,2} \cdot U_2 + \ldots + Y_{n-1,n-1} \cdot U_{n-1} \end{aligned} \tag{3.4.4}$$



3.4.5. ábra – Példahálózat 2.

Természetesen a fenti módszer impedanciák alkalmazása mellett is működik:

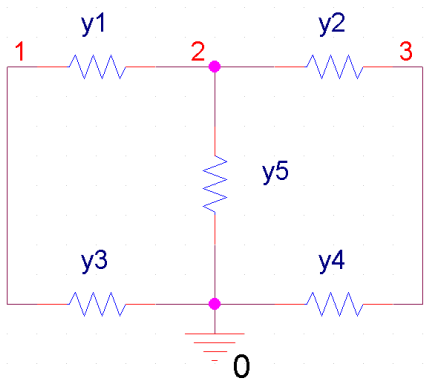
$$U_i = \sum_{j=1}^{n-1} Z_{ij} I_j \tag{3.4.5}$$

ahol mindig igaz, hogy:

$$\sum_{j=1}^{n-1} Z_{ij} \cdot Y_{js} = E_{is} \tag{3.4.6}$$

Az előzőekben bemutatottakra nézzünk egy egyszerű példát. Állítsuk elő a 3.4.6 ábrán látható hálózat admittanciamátrixát. (A példa csak formális, hiszen ebben a hálózatban minden áram és feszültség zérus). A hálózati egyenletek a következők:

$$I_1 = (U_1 - 0) \cdot y_3 + (U_1 - U_2) \cdot y_1$$
$$I_2 = (U_2 - 0) \cdot y_5 + (U_2 - U_1) \cdot y_1 + (U_2 - U_3) \cdot y_2$$
$$I_3 = (U_3 - 0) \cdot y_4 + (U_3 - U_2) \cdot y_2$$



3.4.5. ábra – Példahálózat 3.

Az admittanciamátrix pedig:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_3 & -y_1 & 0 \\ -y_1 & y_1 + y_2 + y_5 & -y_2 \\ 0 & -y_2 & y_2 + y_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

A következőkben tekintsük át, hogyan lehet az admittanciamátrix előállítását automatizálni. Az admittanciamátrix automatikusan négy lépésben generálható:

1. Üres hálózat admittanciamátrixának elemei 0-k.
2. Ha a hálózat egy G vezetést tartalmaz a k. és a v. csomópontok között, akkor az admittanciamátrix:

$$Y_{js} = \begin{array}{c} \\ k. \\ v. \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & & \\ & +G & -G \\ & -G & +G \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & k. & v. \end{array} \end{array}$$

3. Ha a hálózat egy S meredekségű feszültségvezérelt áramgenerátort tartalmaz, amely (előjelhelyesen) az ik. és iv. csomópontok között helyezkedik el, és a vezérlő ág a vk. és vv. csomópontok között van:

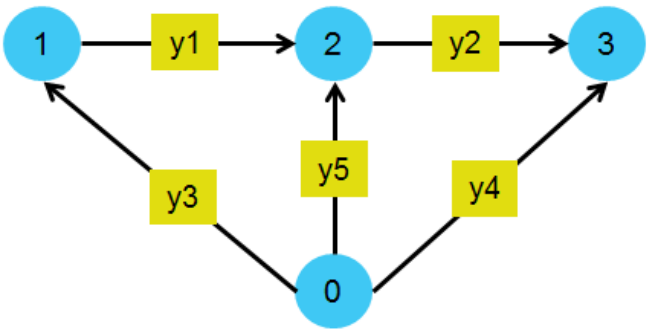
$$Y_{js} = \begin{array}{c} ik. \\ iv. \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & & \\ & -S & +S \\ & +S & -S \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & vv. & vk. \end{array} \end{array}$$

4. Ha két hálózatot párhuzamosan kapcsolunk, az admittanciamátrixaik elemenként összegződnek.

Tehát az admittanciamátrix automatikus előállításának algoritmusa során egy üres hálózatból (nulla mátrix) indulunk ki, majd az elemeket egyenként beépítjük a hálózatba (a mátrixba beírjuk a megfelelő R és S értékeket).

Hálózati topológia kezelése az ún. ***incidenciamátrix*** (K) segítségével is lehetséges. Az incidenciamátrix minden oszlopa egy élhez tartozik. Minden oszlopban egy +1-es és egy −1-es szerepel, a többi helyen nullák. Minden sor pedig egy csúcshoz tartozik. Ha az i-edik csúcsból megy ki a k-adik él (vagyis k töve éppen i), akkor $I_{i,k} = -1$. Ha az i-edik csúcsba megy be a k-adik él (vagyis k feje éppen i), akkor $I_{i,k} = +1$. Ha az i-edik csúcs se nem töve, se nem feje a k-adik élnek, akkor Ii,k = 0. Az (indefinit) incidenciamátrix egy oszlop törlésével (0.) tehető definitté.

Tekintsük át a 3.4.6 ábrán látható példát és írjuk fel az incidenciamátrixát.



3.4.6. ábra – Példahálózat 4.

Az előállt incidenciamátrix a következő:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Az incidenciamátrix legfőbb jelentősége, hogy alkalmazásával a Kirchoff-egyenletek mátrixműveletekkel írhatók fel. Csomóponti Kirchoff-egyenletek incidenciamátrix segítségével:

$$I_j = \sum_{i=1}^{N} K_{ij} J_i \tag{3.4.7}$$

ahol J_i az i. ág árama, N az ágak száma, M a csomópontok száma (0-dik nélkül!). I_j általában nulla, mert nem kényszerítünk áramot a csomópontba. A hurokegyenletek incidenciamátrix segítségével:

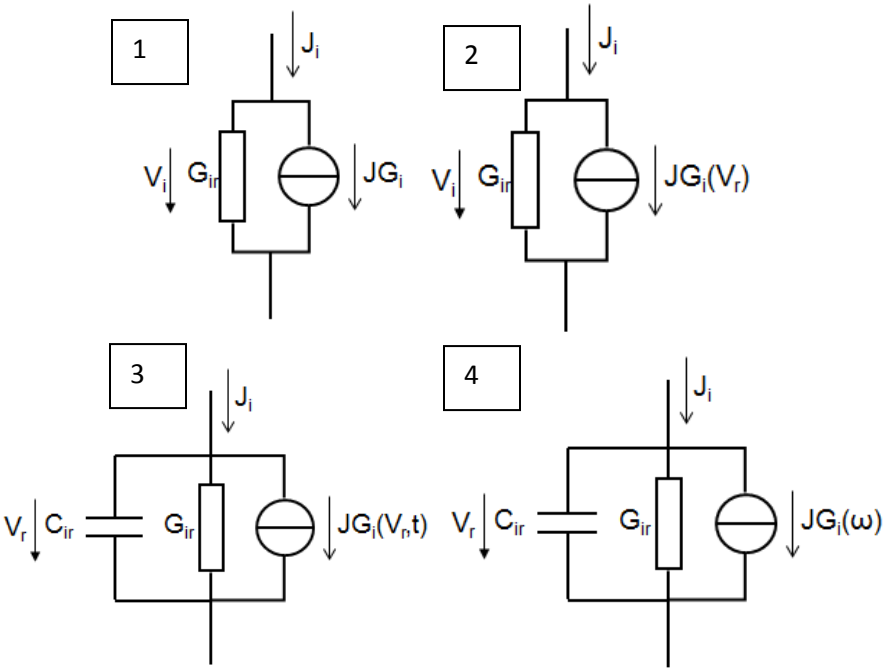
$$V_r = \sum_{s=1}^{M} K_{rs} U_s \tag{3.4.8}$$

ahol U_s a csomóponti potenciálok oszlopvektora és V_r az ágfeszültségek oszlopvektora.

A továbbiakban térjünk át az ***ágegyenletek (karakterisztikák)*** kezelésére. A hálózatot alkotó ágak meghatározott fizikai tulajdonságokkal rendelkeznek. Ez az összefüggés az ágtörvény, amelynek a hálózat ágaira vonatkozó megfogalmazása adja az ágegyenleteket. Tetszőleges ágtörvények használata nem lehetséges, hanem adott algoritmusokhoz általános ágat kell rendelni, melynek kiválasztási szempontjai:

- legyen egyszerű (megoldás sebessége),
- tartalmaznia kell a fizikai ágtörvényszerűségek közül annyit, amennyivel az alkatrészmodellekkel szembeni követelmények teljesíthetőek.

Tekintsük a 3.4.7 ábrán látható 1-es példát.



3.4.7. ábra – Példahálózatok 5.

Az általános ág feszültség-áram kapcsolata:

$$J_i = \sum_{r=1}^{N} G_{ir} V_r + JG_i \tag{3.4.9}$$

ahol G_{ir} a saját és transzfer vezetések mátrixa. Ezt behelyettesítve a csomóponti egyenletbe: $\left(I_j = \sum_{i=1}^{N} K_{ij} J_i \right)$

$$I_j = \sum_{i=1}^{N} K_{ij} \sum_{r=1}^{N} G_{ir} V_r + \sum_{i=1}^{N} K_{ij} JG_i \tag{3.4.10}$$

Ezután helyettesítsük be V_r-t: $\left(V_r = \sum_{s=1}^{M} K_{rs} J_s \right)$

$$I_j = \sum_{i=1}^{N} K_{ij} \sum_{r=1}^{N} G_{ir} \sum_{s=1}^{M} K_{rs} U_s + \sum_{i=1}^{N} K_{ij} JG_i \tag{3.4.11}$$

átrendezés után:

$$I_j = \sum_{s=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{N} K_{ij}G_{ir}K_{rs}\right)\cdot U_s + \sum_{i=1}^{N} K_{ij}JG_i \tag{3.4.12}$$

Ha kívülről sem feszültséget, sem áramot nem kényszerítünk a hálózatra:

$$0 = \sum_{s=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{N} K_{ij}G_{ir}K_{rs}\right)\cdot U_s + \sum_{i=1}^{N} K_{ij}JG_i \tag{3.4.13}$$

Az egyenlet együtthatómátrixának értelmezése (tegyük passzívvá a hálózatot):

$$I_j = \sum_{s=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{N} K_{ij}G_{ir}K_{rs}\right)\cdot U_s \rightarrow 0 = \sum_{s=1}^{M} Y_{js}\cdot U_s + \sum_{i=1}^{N} K_{ij}JG_i \tag{3.4.14}$$

Az általános ág feszültség-áram kapcsolata a 3.4.7 ábra, 2-es példa esetén:

$$J_i = \sum_{r=1}^{N} G_{ir}V_r + JG_i\left(V_r\right) \tag{3.4.15}$$

Ezt behelyettesítve a csomóponti egyenletbe, és behelyettesítve V_r-t (kívülről nem kényszerítünk rá áramot):

$$0 = \sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{N} K_{ij}G_{ir}K_{rs}U_s + \sum_{i=1}^{N} K_{ij}JG_i\left(V_r\right) \tag{3.4.16}$$

illetve:

$$0 = \sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{N} K_{ij}G_{ir}K_{rs}U_s + \sum_{i=1}^{N} K_{ij}JG_i\left(\sum_{s=1}^{M} K_{rs}U_s\right) \tag{3.4.17}$$

Az általános ág feszültség-áram kapcsolata a 3.4.7 ábra, 3-as példa esetén:

$$J_i = \sum_{r=1}^{N} G_{ir}V_r + JG_i\left(V_r, t\right) + \sum_{r=1}^{N} C_{ir}\frac{dV_r}{dt} \tag{3.4.18}$$

Az előzőekhez hasonlóan, ezt behelyettesítve a csomóponti egyenletbe:

$$0=\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{N}K_{ij}G_{ir}K_{rs}U_s+\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{N}K_{ij}C_{ir}K_{rs}\frac{dU_s}{dt}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}K_{ij}JG_i\left(\sum_{s=1}^{M}K_{rs}U_s,t\right) \tag{3.4.19}$$

Az általános ág feszültség-áram kapcsolata a 3.4.7 ábra, 4-es példa esetén:

$$J_i=\sum_{r=1}^{N}\left(G_{ir}+j\omega C_{ir}\right)\cdot V_r+JG_i \tag{3.4.20}$$

Az előzőekhez hasonlóan, ezt behelyettesítve a csomóponti egyenletbe:

$$0=\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{N}K_{ij}\left(G_{ir}+j\omega C_{ir}\right)K_{rs}U_s+\sum_{i=1}^{N}K_{ij}JG_i \tag{3.4.21}$$

Az ágegyenletek megoldási módszerei különféle hálózatok esetén:

- Lineáris, egyenáramú:
  - lineáris egyenletrendszer megoldása
  - pl. Gauss-elimináció
- Nemlineáris, egyenáramú:
  - nemlineáris egyenletrendszer megoldása
  - pl. Newton-Raphson eljárás
- Nemlineáris, tranziens:
  - nemlineáris egyenletrendszer megoldása
  - pl. másodrendű Runge-Kutta eljárás, reverse Euler eljárás
- Kisjelű, időtartománybeli analízis:
  - komplex együtthatós lineáris egyenletrendszer megoldása
  - pl. Gauss-elimináció

A fenti módszereket részletesen tárgyaljuk a 4. fejezetben.

A 3.4. fejezet ellenőrző kérdései:

1. Adjon áttekintést az áramköri szimulációs programok kialakulásáról!
2. Határozza meg az áramköri szimuláció szerepét!
3. Sorolja fel az áramköri szimulációk fajtáit!
4. Ismertesse az áramköri szimulációs program felépítését!
5. Hogyan kezeljük az alkatrészeket a szimuláció során?
6. Ismertesse az admittanciamátrix fogalmát, az incidenciamátrix fogalmát és szerepét!
7. Ismertesse az áramkör vizsgálatának menetét lineáris hálózat egyenáramú vizsgálata esetén!

3.5. Elektromágneses modellezés

Az elektromágnesség tan szerves részét képezi a villamosmérnöki képzésnek, ezért ebben a fejezetben –a szimulációs többlet információkon túl – csak a már tanult fizikai összefüggések összegyűjtésére és átismétlésére törekszünk, mélyebb magyarázatok és levezetések nélkül.

Az elektromágneses modellezéssel kapcsolatban először tisztázzuk az *elektromágneses kompatibilitás fogalmát:* minden készülék egyben gerjesztője, elviselője az elektromágneses zavarkörnyezetnek. Elektromágneses szempontból akkor kompatibilis az elektronikus készülék a környezetével, ha megfelelően kicsi az általa kibocsátott zavar és nagy az immunitása.

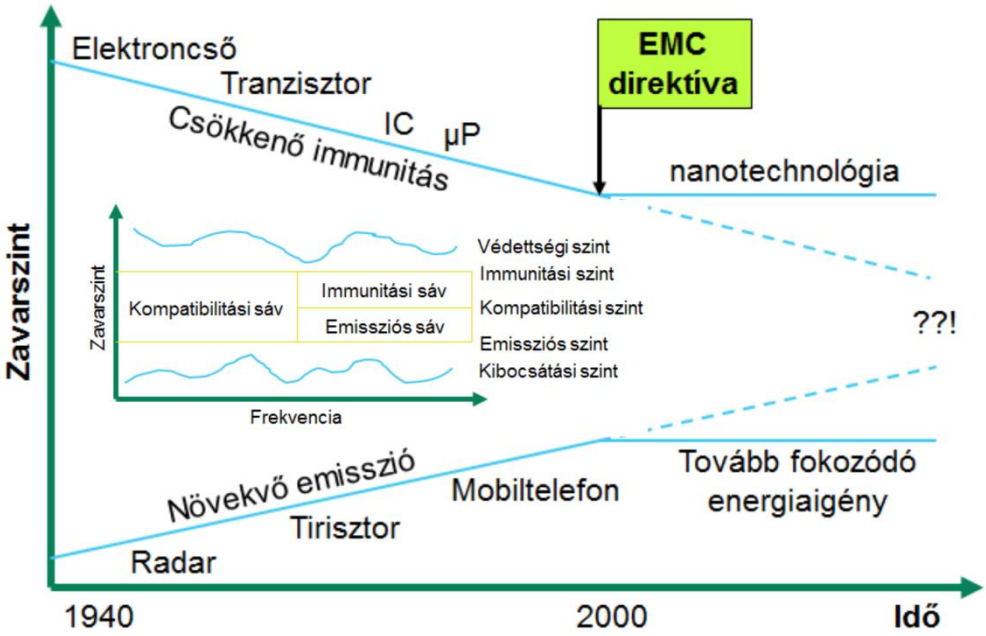
Az elektromágneses kompatibilitási problémák egyre jelentősebbé válását a következő szempontok befolyásolták (3.5.1 ábra):

- országok és világrészek gazdasági összefonódása,
- tranzisztor, tirisztor erősáramú alkalmazása,
- eszközök méretének csökkenése,
- vezeték nélküli távközlés fejlődése,
- működési frekvencia növekedése,
- technikai fejlődés sajátos tendenciája:
    - elektroncső (~Ws zavarenergia elviselése) kontra IC elemei (~nWs zavarenergia elviselése)
    - sugárzó készülékek száma, és a kisugárzott energia folyamatosan növekszik.

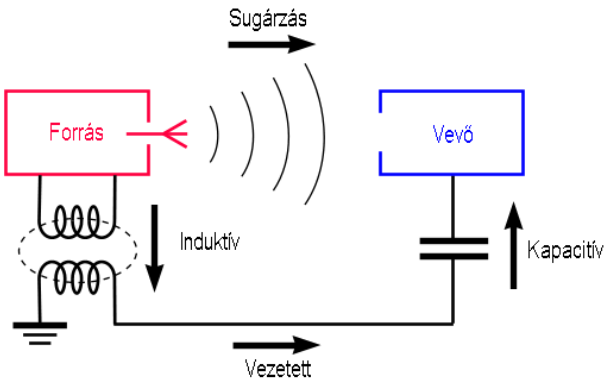
A 3.5.1 ábrán az évről-évre növekvő zavarszintek és csökkenő immunitás problémáját prezentáljuk. Az „Elektromágneses kompatibilitási előírások” definiálnak egy ún. védettségi szintet, amit működése során egy készüléknek még el kell viselnie probléma nélkül, valamint meghatároznak egy ún. kibocsájtási szintet, aminél nagyobb emissziót nem produkálhat a működése során.

Az elektromágneses zavar több úton is eljuthat készülékeinkbe, amelyek alapján megkülönböztetünk (3.5.2 ábra):

- vezetett csatolást (a forrás induktív a vevő kapacitív csatolása útján),
- és sugárzási csatolást.



3.5.1. ábra – Elektromágneses kompatibilitási problémák



3.5.2. ábra – Az elektromágneses csatolás formái.

A különféle ***EMC*** jelenségek a következőképpen osztályozhatók:

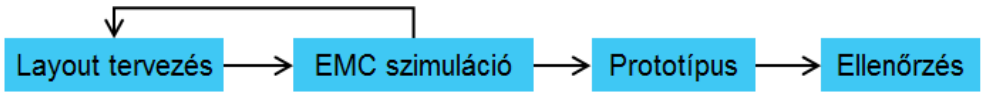
- Frekvencia szerint:
  - kisfrekvenciás,

    - nagyfrekvenciás.
- Csatolás módja szerint:
    - vezetett,
    - sugárzott.
- Zavar időtartama szerint:
    - folyamatos,
    - tranziens.
- Speciális jelenségek:
    - elektrosztatikus kisülés (vezetett és sugárzott),
    - villámcsapás elektromágneses impulzusa,
    - nukleáris elektromágneses impulzus.

Az ***EMC*** szimulációk fajtái és szerepe:

- Vezetékek szintjén:
    - áthallás,
    - reflexió,
    - sugárzás.
- Szerelőlemez szintjén, kibocsátás/érzékenység
- Készülék szintjén, kibocsátás/érzékenység
- Paraméterek szintjén:
    - koncentrált,
    - elosztott.

Az EMC szimuláció helyét az áramkör tervezési folyamatban a 3.5.3 ábra szemlélteti. Egy áramkör tervezése során az EMC szimulációt közvetlenül a layout tervezés után érdemes elvégezni, mivel az esetleges hibák ebben a fázisban még könnyedén (kis költséggel) korrigálhatók. A layout tervezést megelőzően az EMC szimuláció még nem lehet teljes, mivel lényeges effektusok (pl. sugárzási szintek, reflexiós hatások, stb…) csak az elrendezés ismeretében vizsgálható.



3.5.3. ábra – Az EMC szimuláció helye a tervezési folyamatban.

A klasszikus EMC számítás alapjait az ún. hat darab Maxwell egyenlet adja, amelyek a következőek:

1. Gerjesztési törvény: $rotH = J + \frac{\partial D}{\partial t}; \quad \left(\oint_l Bdl = \mu \cdot I \right)$ (3.5.1)

2. Faraday indukciótörvénye: $rotE = -\frac{\partial B}{\partial t}; \quad \left(U = -\frac{d\Psi}{dt} \right)$ (3.5.2)

3. Fluxus megmaradás: $divB = 0; \quad \left(\oint_A BdA = 0 \right)$ (3.5.3)

4. Gauss-törvény: $divD = \rho; \quad \left(\oint_A EdA = \frac{Q}{\varepsilon} \right)$ (3.5.4)

5. $D = \varepsilon \cdot E; \quad B = \mu \cdot H; \quad J = \sigma \left(E + E_b \right)$ (3.5.5)

6. $w = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H$ (3.5.6)

ahol H a térerősség, B az indukció, ψ a fluxus, J az áramsűrűség, E a térerősség, D az eltolás, U a feszültség, ρ a töltéssűrűség, Q a töltés, μ a permeabilitás, ε a permittivitás és w az energiasűrűség.

Az elektrodinamika felosztása alapján a fenti egyenletekre különféle egyszerűsítéseket tehetünk.

Ha az ***időben minden változó*** állandónak tekinthető, a következők állnak fent:

Elektrosztatika: $rotE = 0; \quad divD = \rho; \quad D = \varepsilon_0 \cdot E + P$

Magnetosztatika: $rotH = 0; \quad divB = 0; \quad B = \mu_0 \left(H + M \right)$

Ha az ***időben az áram*** állandónak tekinthető, a következők állnak fent:

Stacioner áram: $rotE = 0; \quad divJ = 0; \quad J = \sigma \left(E + E_b \right)$

Stacioner mágneses tér: $rotH = J; \quad divB = 0; \quad B = \mu_0 \left(H + M \right)$

Ha van ***időbeni változás, de***: $\left| \partial D / \partial t \right| < \left| J \right|$

Kvázi stacioner eset:

$$rotH = J; \quad B = \mu H; \quad J = \sigma \left(E + E_b \right); \quad divB = 0$$

$$D = \varepsilon \cdot E; \quad divD = \rho; \quad rotE = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Teljesen **általános eset** a teljesség kedvéért a következő (elektromágneses hullámok esetén):

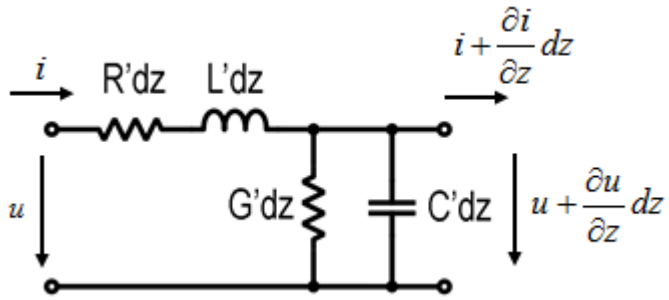
$$rotE = -\frac{\partial B}{\partial t}; \quad rotH = J + \frac{\partial D}{\partial t}; \quad D = \varepsilon \cdot E; \quad divD = \rho$$

$$J = \sigma \left(E + E_b \right) + \rho \cdot v; \quad B = \mu H; \quad divB = 0$$

Az EMC szimulációk egy kiemelt területe az elektromos ***vezetékek vizsgálata,*** amelyek Olivier Heaviside (1850-1925) nevéhez köthetők, és az ún. *telegráf egyenletek* segítségével oldhatóak meg. Legyen a vezeték hosszegységre vonatkoztatott:

- ellenállása R'=R/h,
- induktivitása L'=L/h,
- kapacitása C'=C/h,
- és konduktanciája G'=G/h,

ahol h a vezeték hossza, és az energia z irányban terjed. A telegráf egyenletek segítségével végezzünk el egy vezetékpár vizsgálatot (3.5.4 ábrán):



3.5.4. ábra – Példahálózat 1.

A csomóponti és hurokegyenletek a következők:

$$-u + L'dz\frac{\partial i}{\partial t} + R'dz \cdot i + \left(u + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right) = 0$$
$$-i + C'dz\frac{\partial u}{\partial t} + G'dz \cdot u + \left(i + \frac{\partial i}{\partial z}dz\right) = 0$$

használjuk fel, hogy:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -L'\frac{\partial i}{\partial t} - R' \cdot i$$
$$\frac{\partial i}{\partial z} = -C'\frac{\partial u}{\partial t} - G' \cdot u$$

átalakítások után az állapotegyenletek:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L'C'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(L'G' + R'C'\right)\frac{\partial u}{\partial t} + R'G'u$$
$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = L'C'\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \left(L'G' + R'C'\right)\frac{\partial i}{\partial t} + R'G'i$$

A szinuszos állapot vizsgálatát végezzük el a Helmholtz egyenlettel:

$$\frac{d^2U}{dz^2} - \gamma^2 \cdot U = 0 \quad \text{és} \quad \frac{d^2I}{dz^2} - \gamma^2 \cdot I = 0 \tag{3.5.7}$$

ahol $\gamma = \sqrt{\left(R' + j \cdot \omega \cdot L'\right) \cdot \left(G' + j \cdot \omega \cdot C'\right)}$ az ún. terjedési együttható.

Így az általános megoldás a következő:

$$U(z) = U_1^+ \cdot \exp(-\gamma \cdot z) + U_1^- \cdot \exp(+\gamma \cdot z)$$
$$I(z) = \frac{U_1^+}{Z_0} \cdot \exp(-\gamma \cdot z) - \frac{U_1^-}{Z_0} \cdot \exp(+\gamma \cdot z)$$

ahol U1+ és U1- a peremfeltételek alapján meghatározható (tetszőleges) állandók és Z_0 az ún. hullámimpedancia:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j \cdot \omega \cdot L'}{G' + j \cdot \omega \cdot C'}} \tag{3.5.8}$$

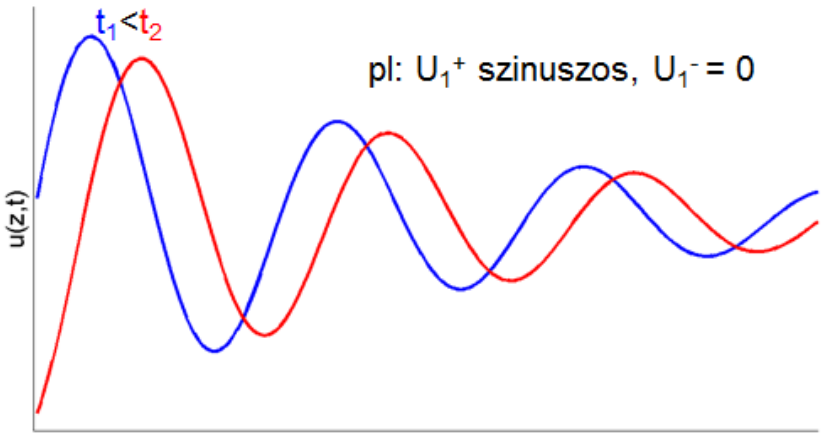
A megoldás értelmezése, ha a peremfeltételek valós értékek:

$$u(z,t) = \Re e\left\{U(z) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t)\right\} = \ldots$$
$$\ldots \Re e\left\{U_1^+ \cdot \exp(-\alpha \cdot z) \cdot \exp\left[j \cdot (\omega t - \beta z)\right] + U_1^- \cdot \exp(+\alpha \cdot z) \cdot \exp\left[j \cdot (\omega t + \beta z)\right]\right\}$$

ahol:

$$\gamma = \alpha + j \cdot \beta; \quad v = \frac{\omega}{\beta}; \quad \Lambda = \frac{2\pi}{\beta}; \quad \lambda = \frac{c}{f}$$

továbbá ahol α a csillapítási együttható, β a fázisegyüttható, ν a fázissebesség, Λ a hullámhossz, λ a szabadtéri hullámhossz. A megoldás grafikus alakja a fenti bonyolult képletnél sokkal szemléletesebb (3.5.5 ábra.)



3.5.5. ábra – A megoldás grafikus szemléltetése.

Megoldás tehát (általánosan): a vezetéken a rákapcsolt feszültség csillapítva tovaterjed.

A következőkben vizsgáljuk meg, hogyan módosul az eredmény, ha lezárást helyezünk a 3.5.4 ábrán látható hálózatra.

Lezárás történhet:

- hullámellenállással,
- reaktanciával (a lezárás nem vesz fel hatásos teljesítményt),
- általános impedanciával.

Lezárás hatásának vizsgálatához használjuk fel a komplex Ohm-törvényt:

$$Z = \frac{U(h)}{I(h)} = \frac{U_1^+ \cdot \exp(-\gamma \cdot h) + U_1^- \cdot \exp(+\gamma \cdot h)}{\frac{U_1^+}{Z_0} \cdot \exp(-\gamma \cdot h) - \frac{U_1^-}{Z_0} \cdot \exp(+\gamma \cdot h)} = Z_0 \frac{U_2^+ + U_2^-}{U_2^+ - U_2^-} \tag{3.5.9}$$

ahol Z a lezárás impedanciája, h a vezeték hossza, U_2^+ és U_2^- a h helyen pozítív, illetve negatív irányba terjedő feszültséghullámok. U_2^+ és U_2^- arányával definiálható az ún. reflexiós tényező:

$$r = \frac{U_2^-}{U_2^+} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \tag{3.5.10}$$

Vagyis, a lezárásra beeső feszültséghullám hatására egy ellenkező irányú hullám indul negatív irányba.

Frekvencia független esetben:

$$u^+(z,t) = u_1\left(t - \frac{z}{v}\right); \quad i^+(z,t) = \frac{1}{Z_0} u_1\left(t - \frac{z}{v}\right); \quad v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}; \quad r_2 = \frac{R_2 - Z_0}{R_2 + Z_0}$$

egy reflexió után:

$$u^-(z,t) = r_2 u_1\left(t - \frac{h}{v} - \frac{h-z}{v}\right); \quad i^-(z,t) = -\frac{1}{Z_0} r_2 u_1\left(t - \frac{h}{v} - \frac{h-z}{v}\right)$$

következő reflexió után:

$$u^{+}\left(z,t\right)=r_2 r_1 u_1\left(t-\frac{2h}{v}-\frac{z}{v}\right);\quad i^{+}\left(z,t\right)=-\frac{1}{Z_0}r_2 r_1 u_1\left(t-\frac{2h}{v}-\frac{z}{v}\right)$$

a dolog további folytatása nélkül is belátható, hogy a feszültség és az áram a reflektált hullámok szuperpozíciójával határozható meg.

A következőkben vizsgáljuk meg az ***ideális vezeték esetét általános lezárás mellett.*** Térjünk át a komplex frekvenciatartományra. A reflexiós tényezők a következő alakot öltik:

$$r_1(s)=\frac{U^{-}(0,s)}{U^{+}(0,s)}=\frac{Z_1(s)-Z_0}{Z_1(s)+Z_0};\quad r_2(s)=\frac{U^{-}(h,s)}{U^{+}(h,s)}=\frac{Z_2(s)-Z_0}{Z_2(s)+Z_0} \qquad (3.5.11)$$

Vegyük figyelembe a vezeték csillapítását a reflexiós tényezőkben:

$$\tilde{r}_1(s)=\exp(-\alpha h)r_1(s);\quad \tilde{r}_2(s)=\exp(-\alpha h)r_2(s) \qquad (3.5.12)$$

ahol $\alpha=\frac{R'}{2}\sqrt{\frac{C'}{L'}}+\frac{G'}{2}\sqrt{\frac{L'}{C'}}$ (3.5.13)

Így az általános esetre a feszültség (a levezetés mellőzése nélkül) és az áram a komplex frekvenciatartományban:

$$U(z,s)=\frac{Z_0(s)}{Z_0(s)+Z_1(s)}\frac{\exp(-\gamma(s)z)+r_2(s)\exp(-\gamma(s)(2h-z))}{1-r_1(s)r_2(s)\exp(-2\gamma(s)h)}U_s(s) \qquad (3.5.14)$$

$$I(z,s)=\frac{1}{Z_0(s)+Z_1(s)}\frac{\exp(-\gamma(s)z)+r_2(s)\exp(-\gamma(s)(2h-z))}{1-r_1(s)r_2(s)\exp(-2\gamma(s)h)}U_s(s) \qquad (3.5.15)$$

ahol U_S priemer oldali generátor és

$$\gamma(s)=\sqrt{\left(R'+sL'\right)\left(G'+sC'\right)};\quad Z_0(s)=\sqrt{\frac{R'+sL'}{G'+sC'}} \qquad (3.5.16)$$

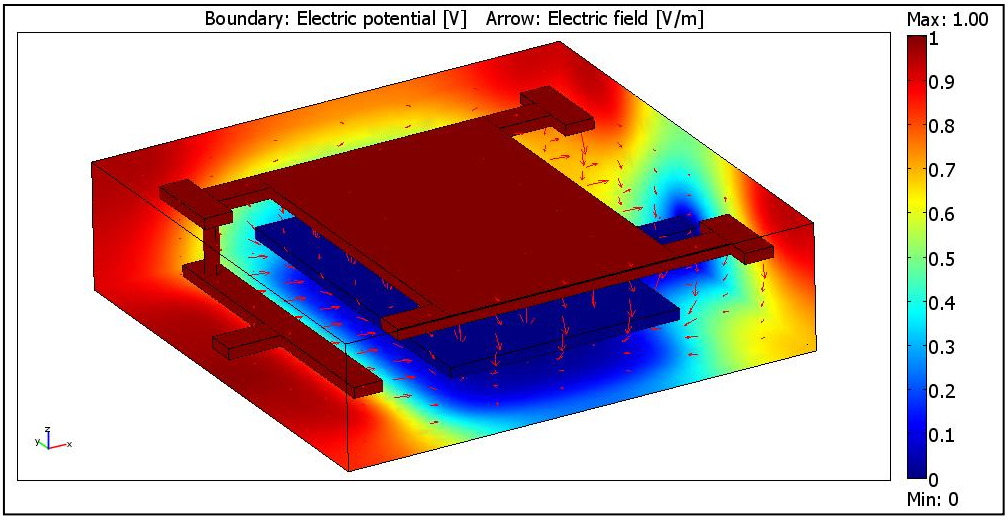
A következőkben nézzünk két szimulációs példát az előzőekben tárgyaltakra. Először végezzünk egy szimulációt sztatikus és stacioner elektromos térre (3.4.5 ábra). A tanultak alapján:

$$rotE = 0; \quad D = \varepsilon_0 \cdot E + P; \quad divD = \rho$$

Alkalmazzuk a Poisson egyenletet a fentiekre:

$$E = -grad\phi; \quad divD = div(\varepsilon \cdot E) = \varepsilon \cdot divE = \varepsilon \cdot div(-grad\phi) = -\varepsilon\Delta\phi;$$

és $-\varepsilon\Delta\phi = \rho$. Ha nincs térfogati töltéssűrűség a Laplace egyenlet szerint: $\Delta\phi = 0$.



3.5.6. ábra – Sztatikus és stacioner elektromos tér.

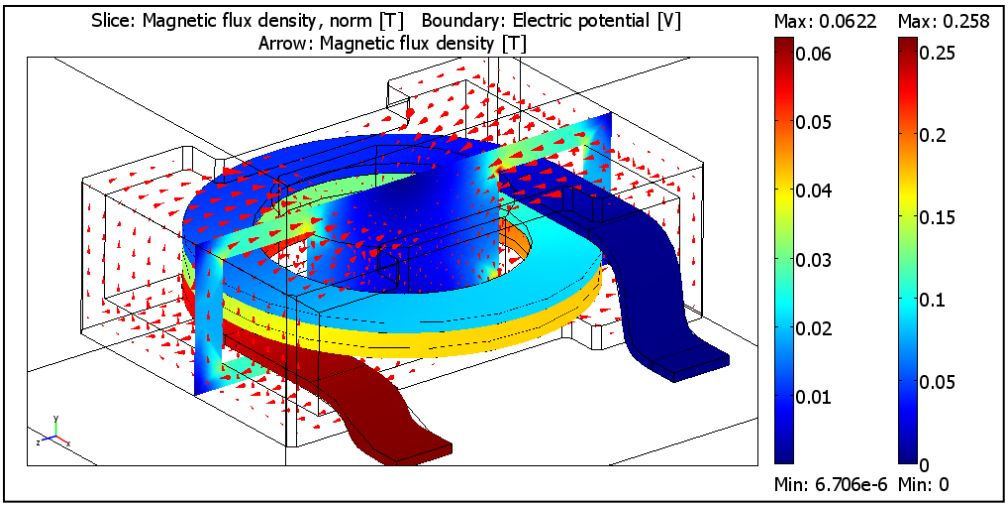
A második esetben végezzünk szimulációt stacioner mágneses térre (3.5.7 ábra). A tanultak alapján:

$$divB = 0; \quad rotH = J; \quad B = \mu_0 (H + M)$$

Alkalmazzuk a Poisson egyenletet a fentiekre:

$$B = rotA; \quad \mu_0 J = rotB = rotrotA = graddivA - \Delta A$$

mivel $divA = 0$ így $\Delta A = -\mu_0 J$. Ha nem folyik áram a magnetosztatika alapján: $rotH = 0$.



3.5.7. ábra – Stacioner mágneses tér.

A továbbiakban röviden térjünk ki az ***elektromágneses hullámok*** tárgyalására. Szorítkozzunk a legszükségesebb összefüggésekre. Az inhomogén hullámegyenlet a levezetés mellőzésével a következő:

$$\Delta A - \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu \cdot J \tag{3.5.17}$$

$$\Delta \phi - \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3.5.18}$$

Az ún. retardált potenciálok:

$$A(r,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{1}{R} \cdot J\left(r', t - \frac{R}{v}\right) dV \tag{3.5.19}$$

$$\phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{1}{R} \cdot \rho\left(r', t - \frac{R}{v}\right) dV \tag{3.5.20}$$

ahol $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$; $R = |r' - r|$.

Az általánosított Biot-Savart törvény alapján a térerősség hely és idő szerinti változása a következő:

$$H(r,t)=\frac{1}{4\pi}\int_l I\left(r',t-\frac{R}{v}\right)\frac{dl'\times R^0}{R^2}+\frac{1}{4\pi v}\int_l \frac{\partial I\left(r',t-\frac{R}{v}\right)}{\partial t}\frac{dl'\times R^0}{R} \qquad (3.5.21)$$

ahol $R^0=\frac{r-r'}{R};\quad R=|r'-r|$.

Így a térerősség rotációképzéssel számítható, három tagja 1/R-rel, $1/R^2$-tel, és $1/R^3$-bel arányos (ez utóbbi a Q töltéssel arányos). A távoli térben a levezetés mellőzésével:

$$\Delta E-\mu\cdot\sigma\frac{\partial E}{\partial t}-\varepsilon\cdot\mu\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0 \qquad (3.5.22)$$

ha $\sigma=0$:

$$\Delta E-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0 \qquad (3.5.23)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{1}{\mu}\cdot rotE \qquad (3.5.24)$$

Szinuszos időbeli változás esetén a következők állnak fenn:

$$\Delta E-\gamma^2 E=0 \qquad (3.5.25)$$

$$H=-\frac{1}{j\omega\mu}rotE \qquad (3.5.26)$$

ahol: $\gamma=\sqrt{j\cdot\omega\cdot\mu\cdot(\sigma+j\cdot\omega\cdot\varepsilon)}$.

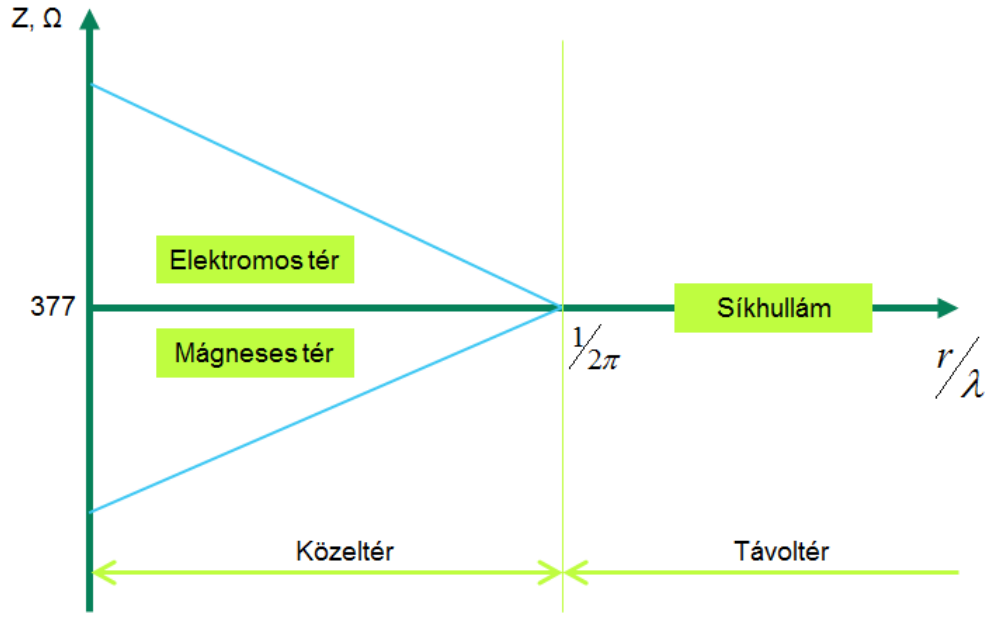
Lineárisan polarizált síkhullámra az elektromos és mágneses térerősség:

$$E_x(z)=E_1^+\cdot\exp(-\gamma z)+E_1^-\cdot\exp(+\gamma z) \qquad (3.5.27)$$

$$H_y(z) = \frac{E_1^+}{Z_0} \cdot \exp(-\gamma z) - \frac{E_1^-}{Z_0} \cdot \exp(+\gamma z) \qquad (3.5.28)$$

ahol: $Z_0 = \sqrt{\dfrac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$.

Végezetül az elektromágneses hullámok feladatok szerinti felosztását a 3.5.8 ábrán szemléltetjük.



3.5.8. ábra – Az elektromágneses hullámok feladatok szerinti felosztása.

A 3.5. fejezet ellenőrző kérdései:

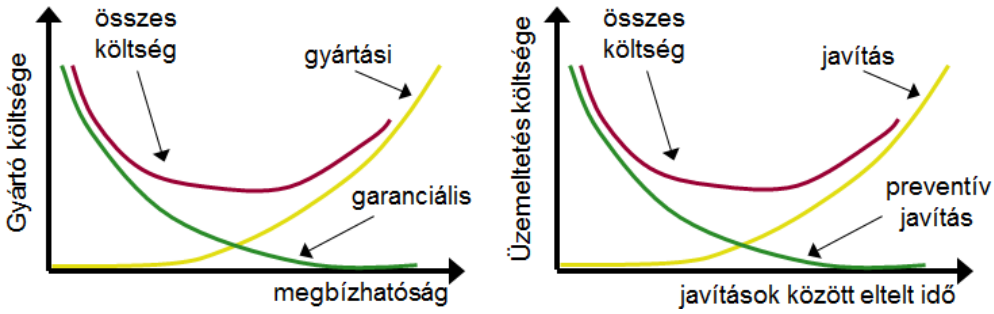
1. Az elektromos kompatibilitás fogalma, a kompatibilitási probléma fejlődése.
2. EMC szimulációk fajtái és szerepe, koncentrált és elosztott paraméterek, a feladatok felosztása.
3. Vezetékek vizsgálata esetén milyen összefüggés képezi a számítások alapját?
4. Stacionárius elektromos/mágneses terek számításakor milyen összefüggés képezi a számítások alapját?

3.6 Megbízhatósági modellezés

A megbízhatóságnak már a készülékek tervezési fázisában történő vizsgálati igénye – az ún. *„megbízhatósági tervezés”* – életre hívója, a múlt század közepén a nagy megbízhatóságú rendszerek tervezésének igénye volt (repülés, katonai eszközök, űrkutatás). Azonban a néhány évtizede elkezdődött robbanásszerű terjedése annak köszönhető, hogy a gyártók felismerték a megbízhatósági tervezés közvetlen és közvetett gazdasági hatásait. A megbízhatóságra tervezésben az empirikus vizsgálatok mellett egyre nagyobb szerepet kap a szimuláció.

A megbízhatósági tervezés alkalmazásának előnyei:

- megbízhatóság növelése:
  - „derating”,
  - worst case (tolerancia) analízis,
  - hőmérséklet hatásának vizsgálata,
  - hibafa analízis, gyenge pontok felderítése,
- megtalálható a termékek megbízhatóságának optimuma (a gyártói költségek tükrében, 3.6.1 ábra),
- kritikus rendszerek esetén tervezhető a preventív javítás időpontja (3.6.1 ábra),
- tervezhető a termékek élettartama (korai meghibásodás, erkölcsi elavulás),
- kritikus rendszerek esetén tervezhető a tartalékolás mértéke,
- a termék elemeinek megbízhatósága összehangolható.



3.6.1. ábra – A megbízhatóságra tervezés előnyei.

Manapság az ún. „costum” elektronikai cikkeket gyártó vállalatoknál a készülékek funkcionális tervezése mellett egyre nagyobb hangsúlyt kap az adott készülékre vetítve a 3.6.1 ábra bal oldali grafikonjának előállítása. Például érdemes-e drágább alkatrészek beszerelésével az adott termék gyártási költségét növelni, ugyanakkor a meghibásodása valószínűségét csökkenteni és ezzel a garanciális javítások költségét is csökkenteni?

Nagy megbízhatóságú rendszerek (pl. telekommunikációs rendszerek) üzemeltetőinél pedig lényeges a 3.6.1 ábra jobb oldalának vizsgálata az adott rendszerre vetítve. Például milyen gyakran érdemes preventív javítást végezni, hogy a meghibásodás (leállás) valószínűségét egy elfogadható határon belülre szorítsuk?

A megbízhatóság vizsgálata szempontjából lényeges tisztázni a következő fogalmakat:

Minőség: az adott termék a fogyasztó szerint milyen mértékben felel meg azoknak a funkcióknak, amelyeket a fogyasztó tudatosan elvár. (Meg kell jegyezni, hogy ezen kívül számos merőben más értelmezés is létezik.)

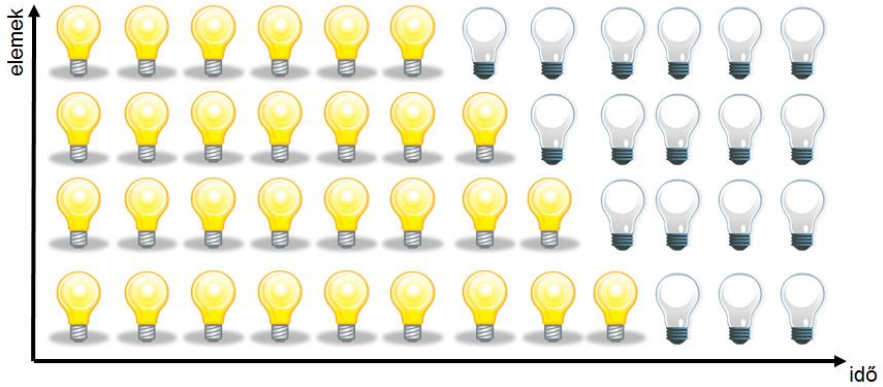
Megbízhatóság: meddig, milyen hosszú ideig őrzi meg minőségét egy termék meghatározott üzemeltetési feltételek mellett.

Elem, alkatrész: megbízhatósági szempontból tovább nem bontható, megbízhatóságát nem részeiből számítják ki, általában nem javítható (pl.: ellenállás, tranzisztor, kiöntött tápegység).

Készülék, rendszer: megbízhatósági szempontból tovább bontható, megbízhatóságát részeiből számítják ki, általában javítható.

A megbízhatóság mélyebb megértése végett tekintsük át a következő alapkísérletet: üzemeltessünk azonos alkatrészeket azonos körülmények között, és rögzítsük a meghibásodások időpontját (3.6.2 ábra). Azonos alkatrészek természetesen nem léteznek, viszont a gyártósorról egymás után lejövő termékek igen hasonlóak. Ennek egyik gyakorlati következménye, hogy redundáns rendszerekben nem szokás egy batch-ből származó alkatrészeket, részegységeket használni. Például ne használjunk redundáns

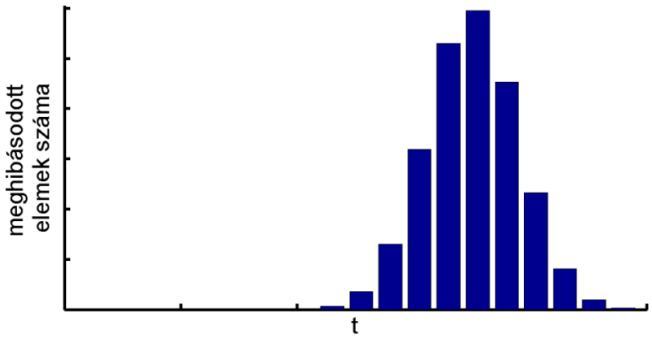
adattárolásra azonos típusú merevlemezeket, kiváltképpen, ha ezeket egy üzletben, egyszerre vásároljuk, mert nagy az esély arra, hogy egy batch-ből származnak!



3.6.2. ábra – Megbízhatósági alapkísérlet.

A megbízhatóság fenti definíciójával ellentétben – ahol azt láttuk, hogy a megbízhatóság időfüggő – az alapkísérletből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a megbízhatósági dimenziója ezzel szemben nem lehet az idő. (A meghibásodás egy bizonyos alkatrész esetén nem egy konkrét időtartam.) Bár vehetjük a meghibásodási idők várható értékét (és egyéb statisztikai paramétereit), de ezzel még nem kapunk teljes képet az alkatrész megbízhatóságáról.

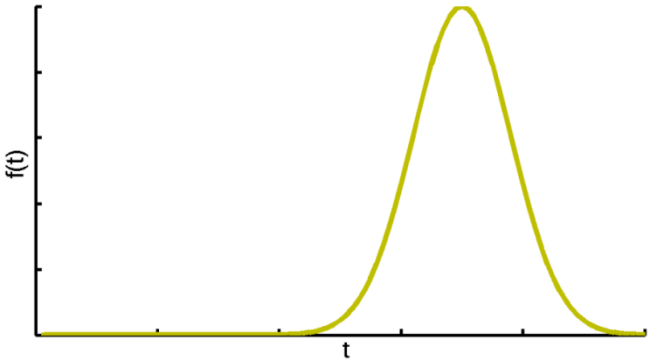
Az alapkísérlet további értelmezése céljából vegyük fel egy grafikonra, hogy a meghibásodási idők milyen időintervallumokba esnek (3.6.3. ábra).



3.6.3. ábra – Meghibásodások száma adott időintervallumokban.

Végtelen sok alkatrészt feltételezve az időintervallumok szélessége infinitezimálisra csökkenthető, a függvény integrálját pedig 1-re normáljuk, így kapjuk meg az ún***. megbízhatósági sűrűségfüggvényt*** (f(t), 3.6.4 ábra):

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \le \tau < t + \Delta t)}{\Delta t} \tag{3.6.1}$$



3.6.4. ábra – A megbízhatósági sűrűségfüggvény.

Kell találnunk egy leírást, amellyel az alkatrész vagy készülék megbízhatóságát jellemezni tudjuk. A megbízhatósági függvény teljesen alkalmas egy alkatrész vagy készülék megbízhatósági jellemzésére, sőt nem csak azt mutatja meg, hogy mikor történt a meghibásodások nagy része, hanem azt is, hogy a többi meghibásodás ehhez képest hol, illetve hogyan helyezkedett el. A függvény előnye tehát, hogy minden információ bele van sűrítve, azonban ez egyben hátránya is lehet. Sok esetben nem biztos, hogy szükségünk van ilyen sok információra (valamilyen egyszerűbb kérdésre szeretnénk választ kapni), másrészt elképzelhető, hogy a függvényt nem tudjuk zárt alakban leírni. A megbízhatósági függvénnyel kapcsolatos további probléma, hogy definíciójában szerepel a „végtelen sok alkatrészt feltételezve” kitétel, amely a gyakorlatban nem teljesíthető, és előrevetíti a megbízhatósági jellemzők mérésének nehézségeit.

A következőkben tekintsük át, milyen információk nyerhetők a megbízhatósági sűrűségfüggvényből:

- megmutatja, hogy adott működési idő mekkora valószínűséggel várható,
- megmutatja, hogy mekkora az adott időintervallumban történő meghibásodás valószínűsége (3.6.5 ábra), gyakorlati jelentősége egyébként kicsi:

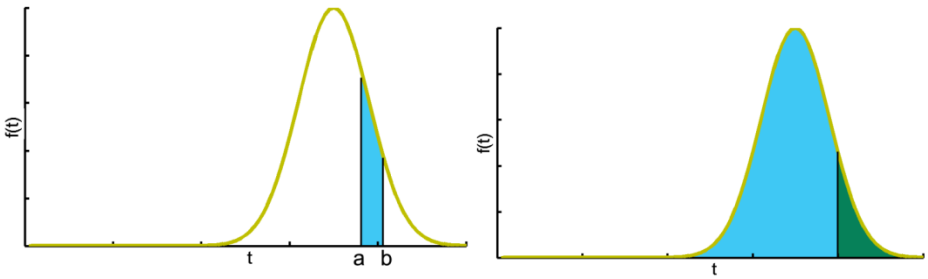
$$P(a \le \tau \le b) = \int_a^b f(t)\,dt \qquad (3.6.2)$$

- sokkal lényegesebb, hogy megmutatja az adott időpontig bekövetkező meghibásodás valószínűségét (amely az ún. meghibásodási függvény, F(t), 3.6.5 ábra):

$$F(t) = P(\tau \le t) = \int_0^t f(t)\,dt \qquad (3.6.3)$$

- valamint megmutatja az adott időpontig történő működés valószínűségét (ami az ún. megbízhatósági függvény, R(t), 3.6.5 ábra):

$$R(t) = P(t \le \tau) = \int_t^\infty f(t)\,dt = 1 - F(t) \qquad (3.6.4)$$



3.6.5. ábra – A megbízhatósági sűrűségfüggvény értelmezés.

A megbízhatósági függvény jellemzői:

- 1-ről indul (a nulla időpillanatban minden alkatrész működőképes),
- 0-hoz tart (minden alkatrész meghibásodik előbb-utóbb),
- csökkenő jelleget mutat (az alkatrészek öregednek),
- teljes időtartományra vett integrálja a várható élettartamot adja (T0, MTTF, Mean Time To Failure):

$$T_0 = E(\tau) = \int_0^\infty R(t)dt \tag{3.6.5}$$

A sűrűségfüggvény kétszeri integrálásával (megbízhatósági függvényen keresztül) visszajutottunk az első kérdésünkhöz: a megbízhatóság részben jellemezhető idő dimenziójú mennyiséggel, a várható élettartammal, amely triviálisan a működési idők várható értékével egyezik meg. A várható élettartam nem ad teljes képet a megbízhatóságról, viszont fogalma közelebb áll a mindennapi gondolkodáshoz (Pl. a kompakt izzók dobozán is várható élettartamot tüntetnek fel a gyártók annak ellenére, hogy a megbízhatósági függvény több információt tartalmaz…).

Amennyiben nem ismernénk az imént elvégzett alapkísérletet és annak sajátosságait, a megbízhatósággal kapcsolatban a következő kérdést tehetnénk fel: „Itt van egy alkatrész (vagy készülék), mikor fog meghibásodni?” Most viszont már tudjuk, hogy erre a kérdésre nem lehet egzakt választ adni. A kérdés helyes megfogalmazásban a következőképpen hangzik: „Ha üzemeltetünk egy alkatrészt vagy készüléket, milyen gyakran számíthatunk meghibásodásra?”

Erre a kérdésre a ***hibaráta függvény*** (más néven hazárd függvény) ad választ, amely definíció szerint: egy alkatrész populációban történt meghibásodások száma osztva a meghibásodásig (vagy a vizsgálat végéig) eltelt idők összegével. A hibaráta függvény természetesen a fent definiált minőségi paraméterekből is meghatározható:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t) - R(t+\Delta t)}{\Delta t \cdot R(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \tag{3.6.6}$$

A hibaráta függvény arra adja meg tehát a választ, hogy időegység alatt hány meghibásodásra számíthatunk. Ez az érték – ellentétben a definícióval – vonatkozhat egyetlen alkatrészre is, és olyan alkatrészre is, amely nem javítható (annak ellenére, hogy ebben az esetben a „milyen gyakran” kifejezésnek lényegében nincs értelme). A definíció egyben mérési utasítás is, természetesen annál pontosabb eredményt kapunk, minél nagyobb a kísérleti alkatrész populáció.

Egy alkatrész megbízhatósága (hibaráta függvénye) nagyban függ az alkatrész kivitelétől és az üzemeltetés körülményeitől. Elektronikus alkatrészek esetén a legfontosabb tényezők:

- a kivitelezés típusa (kereskedelmi, ipari, katonai…),
- előállítás technológiája (pl. nagy és kis értékű ellenállások gyártástechnológiája eltérő),
- hőmérséklet,
- terhelés,
- a készülék (amely az alkatrészt tartalmazza) üzemeltetési körülményei:
    - hőmérséklet ingadozása,
    - páratartalom és ingadozása,
    - rázás, ütés (pl. asztali, mobil, autóelektronikai készülék),
    - egyéb hatások (pl. korrozív környezet).

Ahogy azt láthatjuk, a hibaráta függvény (a megbízhatóság) sok paraméter függvénye. A megbízhatósági számításokba ezek a függések viszik a legnagyobb bizonytalanságot: például ha egy készülék megbízhatósági analízisében a hibaráta függvény kiszámításakor a mérnök 20°C-os külső hőmérsékletet és alacsony mechanikus behatásokat feltételezett, de a felhasználó 30°C-on üzemelteti a készüléket, továbbá gyakori ütésnek, rázásnak teszi ki, a megbízhatósági számítás eredménye rendkívül pontatlan lesz.

A hibaráta függvény meghatározásának lehetőségei:

- alkatrészek modellezésével (bonyolultsága miatt erősen korlátozott lehetőségek),
- kísérletek segítségével:
    - szabvány alapján (pl. Mil-HDBK 217F),
    - saját mérésekkel és azok kiértékelésével (élettartam és gyorsított vizsgálat).

A hibaráta függvény meghatározása leggyakrabban szabványok alapján történik, ezt úgy is tekinthetjük, hogy a kísérleteket és azok kiértékelését

mások végezték el helyettünk. (Érdekességképpen gondoljunk bele, mennyi kísérlet állhat a napjainkban elterjedt két nagy szabvány mögött (MIL-HDBK 217F és SR-331), melyek a forgalomban lévő összes elektronikai alkatrészre vonatkozó megbízhatósági adatokat tartalmazzák!

A meghibásodásért felelős mechanizmusok a különböző alkatrésztípusoknál eltérőek, ezért az alkatrészek megbízhatóságának időfüggése is eltérő. Az alkatrészeket megbízhatósági viselkedésük alapján három csoportba szokás sorolni (más csoportok is vannak, de használatuk nem elterjedt), e három csoporttal az elektronikai alkatrészek szinte egésze lefedhető. Az egyes csoportokat az f(t)-re illeszthető függvények szerint különböztetjük meg.

Az első csoportba a normál eloszlással leírható alkatrészek tartoznak, melyekben valamilyen „kopás" jellegű folyamat zajlik bekapcsolt állapot esetén. Ilyen alkatrészek esetén a megbízhatósági sűrűségfüggvény:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{3.6.7}$$

ahol m: várható élettartam és σ: szórás (bizonytalansági paraméter). A sűrűségfüggvény mindkét paraméterének fontos szerepe van, a várható élettartamot a gyártó – különböző szempontok alapján – megtervezi, a szórást a gyártástechnológia minősége adja. Minél pontosabb az utóbbi, annál pontosabban a tervezett érték közelébe lesz a várható élettartam. A legszemléletesebb példa az ilyen típusú alkatrészekre az izzószálas villanykörte (de ide tartozik az összes üzemszerűen „kopó" alkatrész is, pl. kapcsoló, csatlakozó stb…), amelyben működés közben az izzószál párolog, ezért a már 1000 órát üzemelt körte a következő órában sokkal nagyobb valószínűséggel hibásodik meg, mint amelyik csak 10, vagy 100 órát üzemelt.

A következő csoportba az exponenciális eloszlással leírható alkatrészek tartoznak, amelyeket más néven „örök ifjúnak" is szokás nevezni, abból az érdekes működési sajátosságból kifolyólag, hogy a működési valószínűségük nem függ attól, hogy előtte már mennyit üzemeltek. Ebbe a csoportba tartozik a legtöbb elektronikus alkatrész (ellenállás, kondenzátor, IC-k, stb…). Ilyen alkatrészek esetén a megbízhatósági paraméterei:

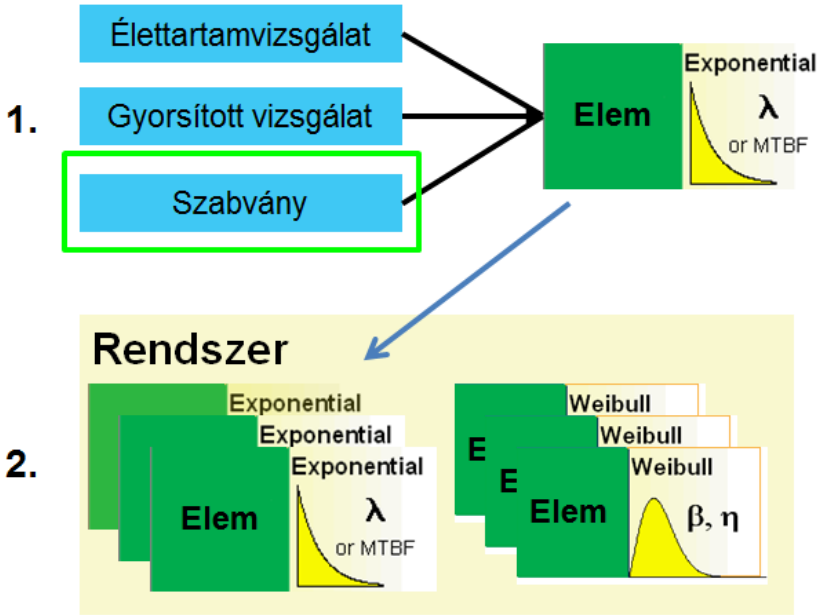
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \quad R(t) = e^{-\lambda t}; \quad \lambda(t) = \lambda = \frac{1}{T_0} \tag{3.6.8}$$

A harmadik csoportba a Weibull eloszlással leírható alkatrészek (leginkább komplex rendszerek) tartoznak. A Weibull eloszlás segítségével leírható egy komplex rendszer teljes élet ciklusa, a kezdeti meghibásodásoktól a hasznos élettartamon keresztül a végső elöregedési szakaszig. Ilyen alkatrészek esetén a megbízhatósági paraméterei:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}; \quad \lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \tag{3.6.9}$$

ahol η: karakterisztikus élettartam, β: alakparaméter.

A megbízhatósági modellezés alap összefüggéseinek megismerése után térjünk át a ***megbízhatósági modellezés menetére***. A megbízhatósági modell felállítása két fő lépésre osztható, amelyek: 1. az alkatrész modellek előállítása és 2. a rendszermodell előállítása (3.6.6 ábrán).



3.6.6. ábra – Megbízhatósági modell előállítása.

Az alkatrész modellek elállítását (a hibaráta függvény meghatározása) már korábban taglaltuk, ezért most foglalkozzunk a rendszermodell előállításával. A rendszermodell előállításánál alkalmazzuk az általánosan használt Boole-típusú modellt (módszert) és annak jellemzőit:

- A rendszer és az elemek is két üzemállapottal rendelkeznek:
    - működőképes,
    - üzemképtelen.
- Struktúrák alaptípusai (nem villamos kapcsolatok):
    - soros (redundanciamentes),
    - redundáns,
        - meleg-tartalékolt (párhuzamos),
        - hideg-tartalékolt,
        - hardver tartalékolt,
    - vegyes.
- Javíthatóság szempontjából:
    - nem javítható,
    - javítható, felújítható.

A következőkben tekintsük át a legfontosabb megbízhatósági struktúrák jellemzőit.

Soros (redundanciamentes) rendszer:

- egy elem meghibásodása a rendszer meghibásodásához vezet,
- a meghibásodások egymástól függetlenek,
- az elemek azonos fontosságúak,
- megbízhatóság számítása az R(t) alapján célszerű (n db elem):

$$R_e(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot .... \cdot R_n(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \qquad (3.6.10)$$

Redundáns, meleg-tartalékolt rendszer:

- a rendszer működéséhez egy elem működése szükséges,
- alkatrész, részegység, készülék redundancia is lehet,
- hibafelismerő elem, kapcsolóelem esetenként szükséges,

- a tartalék állapota ismert, de energiát fogyaszt és öregszik,
- megbízhatóság számítása az F(t) alapján célszerű (n db elem):

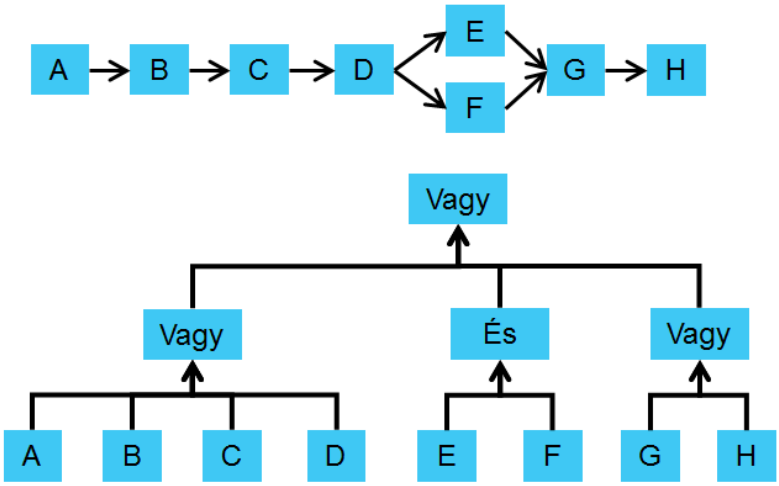
$$F_e(t) = F_1(t) \cdot F_2(t) \cdot .... \cdot F_n(t) = \prod_{i=1}^{n} F_i(t) \qquad (3.6.11)$$

Redundáns, hideg-tartalékolt rendszer:

- a rendszer működéséhez egy elem működése szükséges,
- a tartalékban lévő elem nincs bekapcsolva, nem fogyaszt energiát, nem hibásodhat meg,
- hibafelismerő-kapcsolóelemre van szükség,
- megbízhatóság számítása a várható élettartam alapján célszerű, n azonos elem esetén:

$$T_0 = T_1 + T_2 + ... + T_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \qquad (3.6.12)$$

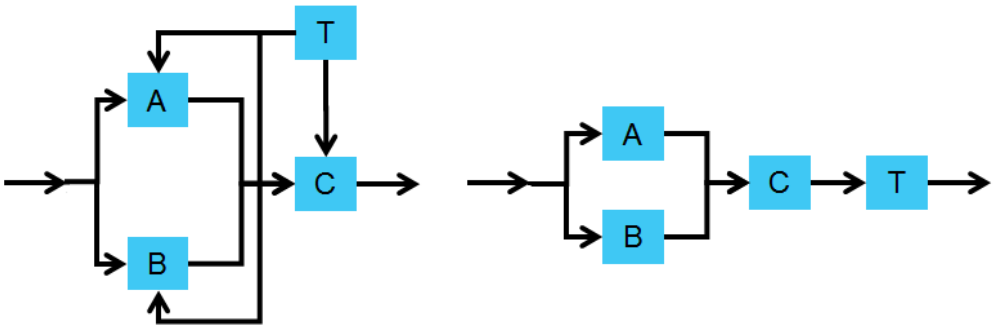
A megbízhatósági struktúra előállításának két gyakori módszere a megbízhatósági blokkdiagram és a hibafa. A 3.6.7 ábrán ugyanazon probléma megbízhatósági blokkdiagramja és hibafája látható.



3.6.7. ábra – Megbízhatósági blokkdiagram és a hibafa.

A hibafa előállítása sok esetben egyszerűbb lehet, azonban a Bool-féle algebrai elemzésre nem alkalmas. Megbízhatósági rendszermodellezéshez minden esetben át kell alakítani megbízhatósági blokkdiagramra.

A megbízhatósági blokkdiagramot nem csak a hibafa ismeretében, hanem közvetlenül a vizsgált rendszer működését leíró blokkdiagramból is előállíthatjuk (egyszerűbb rendszerek esetében mindenképpen). Tekintsük át a 3.6.8 ábrán látható példát, ahol a baloldalon látható egyszerű rendszer működési blokkdiagramjából egyenesen a jobboldalon látható megbízhatósági blokkdiagramot készítjük el.



3.6.8. ábra – Megbízhatósági blokkdiagram működési blokkdiagramból.

A megbízhatósági modellezés egy elterjedt eszköze a Matlab Simulink csomagja, amelyben egy grafikus GUI segítségével állíthatjuk össze a kívánt megbízhatósági modellünket (kevés „kódolás” mellett).

A MATLAB Simulink legfontosabb jellemzői:

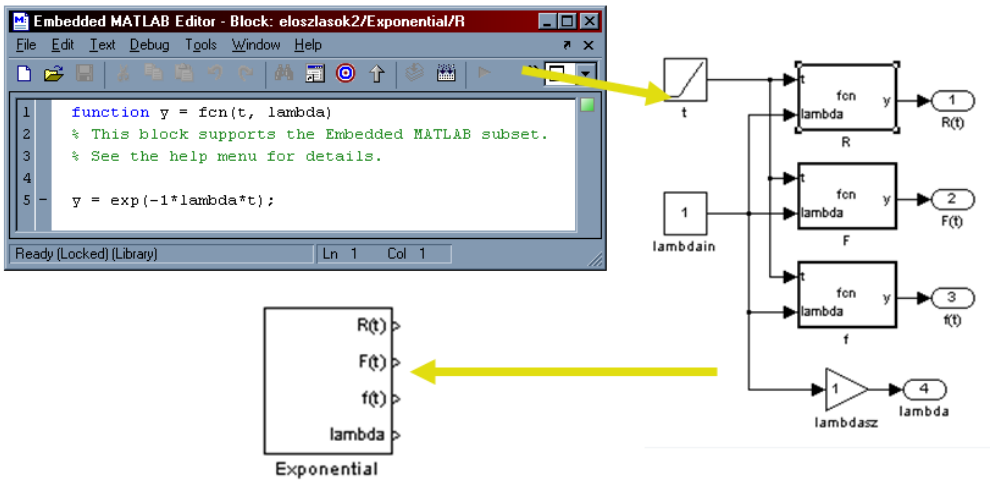
- algoritmusok fejlesztése GUI-n keresztül (programozás nem szükséges),
- modellezési folyamat megvalósítása blokkdiagrammal,
- alkalmazható alapelemek száma nagy, folyamatosan bővül,
- saját kód alkalmazásának lehetősége,
- adatok, eredmények, paraméterek importálása-exportálása.

Főbb hátrányok:

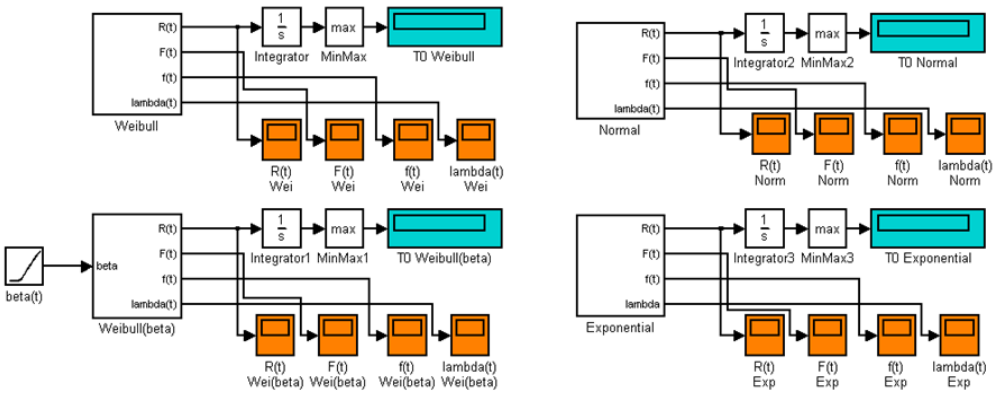
- más módszerekhez képest lassabb,

- nem független program.

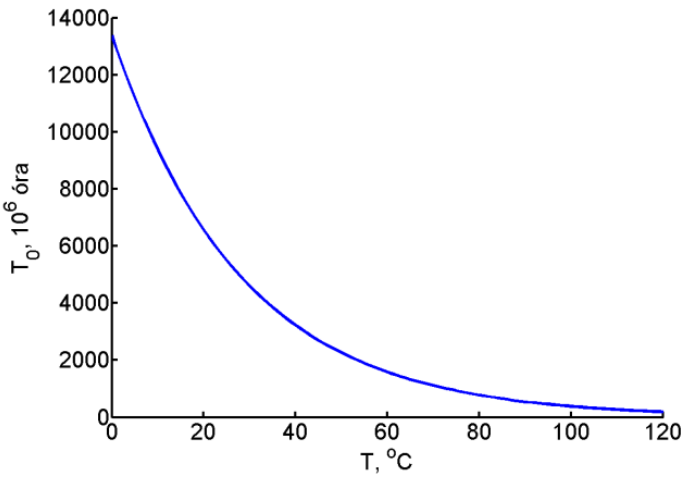
A következőkben a Matlab Simulink használatára nézzünk meg egy egyszerű példát. Az első lépés minden esetben az alkatrészek megbízhatósági modelljének előállítása a 3.6.9 ábrán prezentált módon. A második lépés az alkatrész vizsgálata attól függően, hogy milyen megbízhatósági csoportba tartozik (3.6.10 ábra). Majd harmadik lépés az eredmények értékelése, a 3.6.11 ábrán egy ellenállás megbízhatóságának hőmérsékletfüggését ábrázoltuk.



3.6.9. ábra – Az alkatrészek megbízhatósági modelljének előállítása.

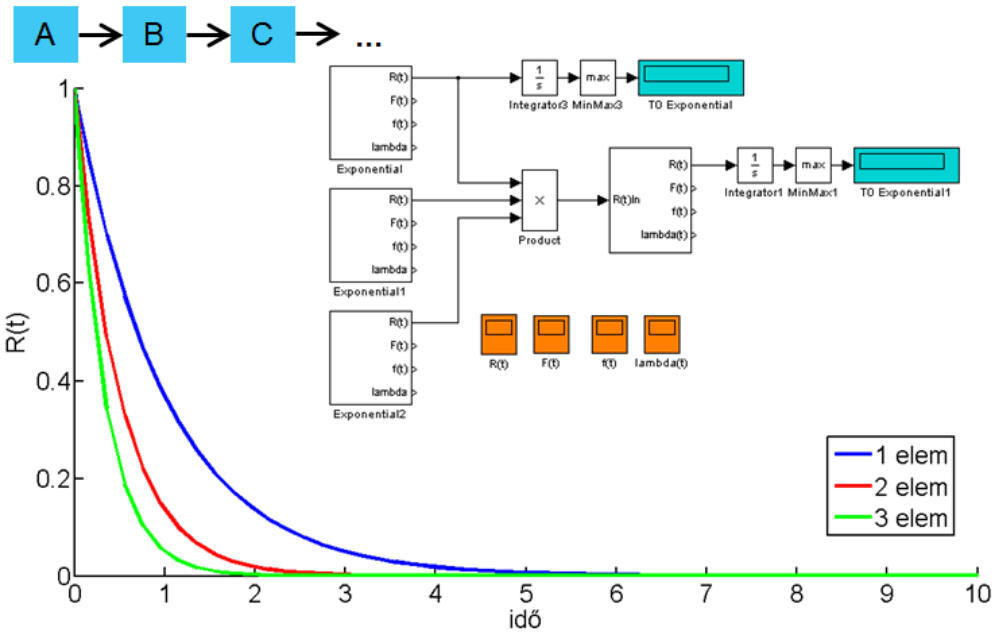


3.6.10. ábra – Az alkatrész vizsgálata (MATLAB Simulink).



3.6.11. ábra – Ellenállás várható élettartama, a hőmérséklet hatása.

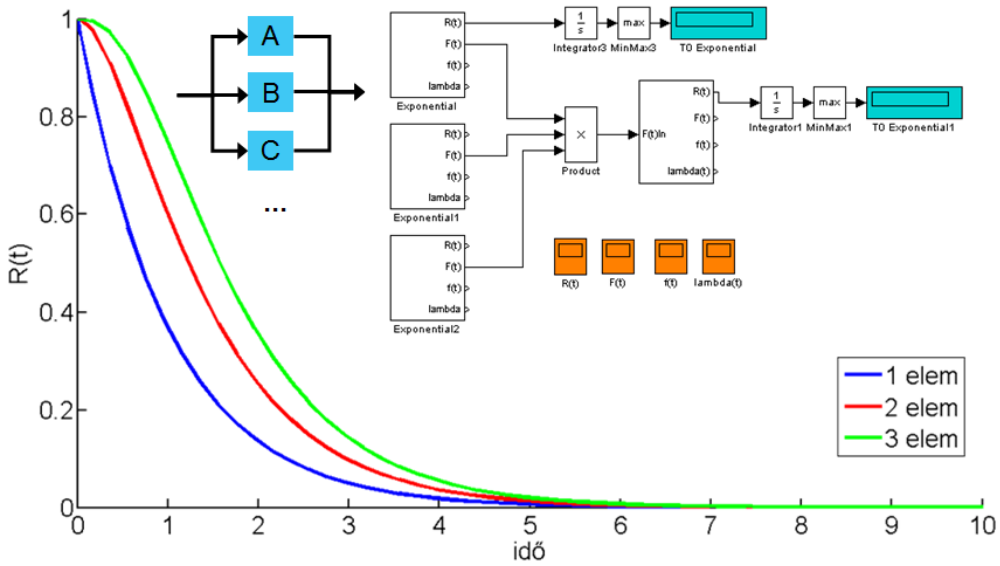
A következőkben a MATLAB Simulink segítségével vizsgáljuk meg, hogyan alakulnak a fent tárgyalt rendszerstruktúrák (soros, redundáns, vegyes) megbízhatósági paraméterei. Először tekintsük át a legegyszerűbb soros struktúra megbízhatósági függvényét (3.6.12). Az egyszerűség kedvéért használjunk azonos exponenciális megbízhatóságú elemeket.



3.6.12. ábra – Soros rendszer megbízhatósági függvénye.

Ha egy soros rendszer elemszámát bővítjük, akkor a rendszer megbízhatósága csökken, mivel akár egy elem meghibásodása esetén is leáll a teljes rendszer. Érdekes megfigyelni a grafikonon, hogy a megbízhatóság az elemek számának növelésével nem egyenes arányban csökken. Néhány elem esetében a megbízhatóság csökkenése látványos, azonban ~5 elem felett már szinte marginális. Tulajdonképpen ez teszi lehetővé, hogy a való életben egyáltalán tudunk soros rendszereket alkalmazni.

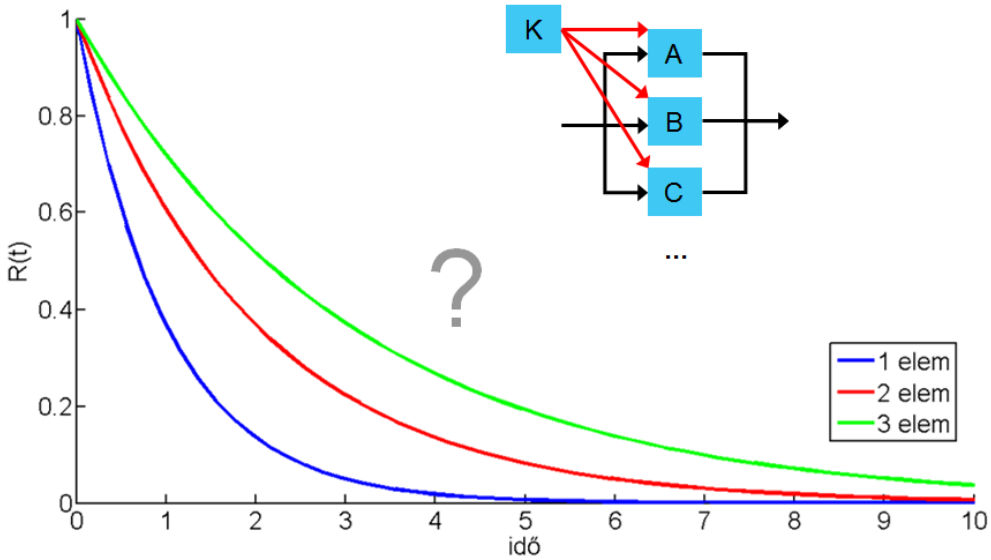
A 3.6.13 ábrán nézzük meg, hogyan alakul egy redundáns meleg-tartalékolt rendszer megbízhatósági függvénye. (Meleg-tartalékolt rendszerek esetén az összes tartalék folyamatosan üzemel, és ezzel együtt „kopik” is.)



3.6.13. ábra – Redundáns meleg-tartalékolt rendszer megbízhatósági függvénye.

Az előző soros rendszerrel ellentétben, itt természetesen a tartalékok számának növelésével egyre növekszik a rendszer megbízhatósága, viszont a meleg-tartalékolás jellegéből adódóan a 100%-os megbízhatósági szint nem érthető el. A növekedés ~4 tartalék beépítése után marginálissá válik, és így teljesen felesleges is. (Például bevett gyakorlat adattárolás esetén az adatok 3 adathordozón való szimultán tárolása.)

A 3.6.14 ábrán tekintsük át, hogyan alakul egy redundáns hideg-tartalékolt rendszer megbízhatósági függvénye. (Hideg-tartalékolt rendszerek esetén csak egy elem üzemel, a tartalékokat egy kapcsoló elem aktiválja, ha szükséges. Így alapesetben a tartalékok nem kopnának.)



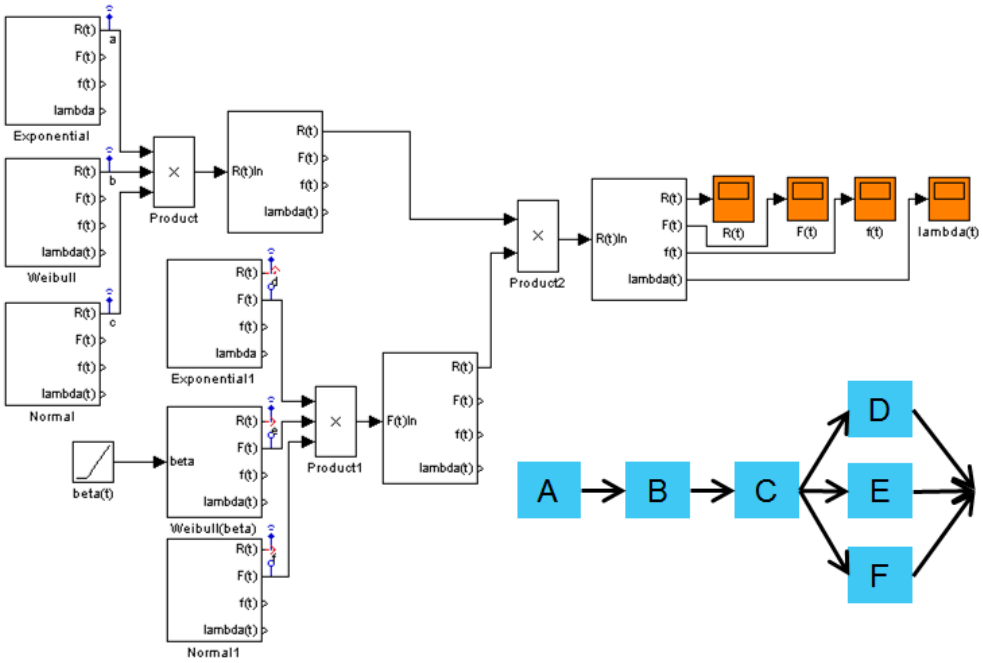
3.6.14. ábra – Redundáns hideg-tartalékolt rendszer megbízhatósági függvénye.

Természetesen a hideg-tartalékolt rendszer megbízhatósági szintje is növekszik a tartalékok számának növelésével. Ha összehasonlítjuk a 3.6.13 és a 3.6.14 ábrákat, láthatjuk, hogy a hideg-tartalékolás magasabb megbízhatósági szintet eredményez, mint a meleg-tartalékolás. Érdekes kérdés, hogy hideg-tartalékolás esetén vajon meddig érdemes növelni a tartalékok számát? (Látható, hogy hideg-tartalékolás esetén az elemszám növelésével nem olyan gyors a megbízhatósági függvény „saturációja”, mint meleg-tartalékolásnál.)

A fenti kérdésre a kapcsoló elem funkciójának megbízhatósági analízisével adhatunk választ. A kapcsoló elem megbízhatósági szempontból kvázi sorosan kapcsolódik a redundáns rendszerünkhöz, azaz a meghibásodása – ha nem is azonnal – de előbb-utóbb a teljes rendszer hibájához vezet, a tartalékok számától függetlenül. Így jó közelítéssel az mondható el, hogy a

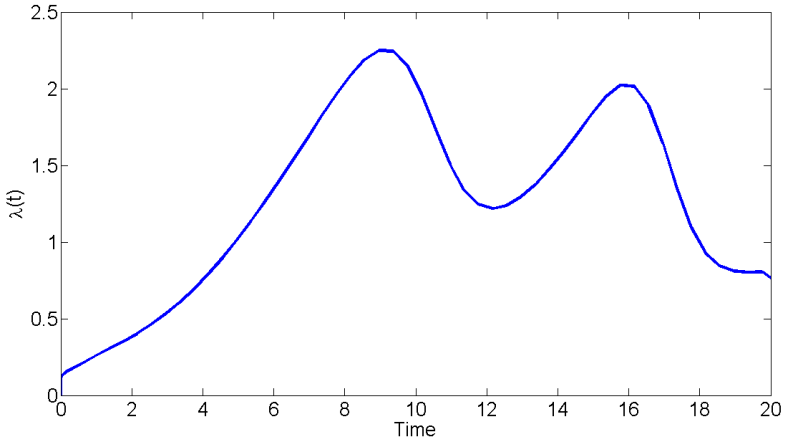
redundáns hideg-tartalékolt rendszer megbízhatóságának elvi felső határa a kapcsoló elem megbízhatósága, ezért a gyakorlatban a kapcsoló elem megbízhatóságát, a kapcsolt kiszolgáló elemek megbízhatóságának sokszorosára (akár tízszeresére) érdemes választani.

Végezetül vizsgáljuk meg, hogyan alakul egy vegyes rendszer megbízhatósági függvénye, három soros, majd három redundáns meleg-tartalékolt elem összekapcsolásával (3.6.15 ábra). (Az elemek megbízhatósági szempontból itt is egyformák.)



3.6.15. ábra – A vizsgált vegyes rendszer.

Vegyes rendszerek esetén az előzőekben látott szisztematikus folyamatok nem figyelhetők meg a megbízhatósági paraméterekben. A fenti vegyes rendszer meghibásodási rátáját a 3.6.16 ábrán szemléltetjük. Sajnos még egy ilyen egyszerű vegyes rendszer esetén sem lehet „messzemenő” következtetések levonni a megbízhatósági paraméterek alakulásából, így vegyes rendszerek esetén sokkal informatívabb lehet, ha a rendszer megbízhatóságát a könnyebben értelmezhető várható élettartammal adjuk meg.



3.6.16. ábra – A vizsgált vegyes rendszer meghibásodási rátája.

A 3.6. fejezet ellenőrző kérdései:

1. Adja meg a minőség és a megbízhatóság definícióját!
2. Milyen információk nyerhetők a megbízhatósági sűrűségfüggvényből?
3. Mik a legfontosabb minőségi paraméterek?
4. Definiálja a meghibásodási ráta fogalmát! Hogyan állítható elő egy adott alkatrész esetében?
5. Milyen tényezők befolyásolják egy alkatrész meghibásodási rátáját?
6. Milyen megbízhatósági modelleket ismer?
7. Mik a Boole típusú modell jellemzői?
8. Jellemezze az egyes megbízhatósági struktúrákat (soros, redundáns)!
9. Hogyan alakul egy soros rendszer megbízhatósága az elemszám növelésével?
10. Hogyan alakul egy redundáns meleg-tartalékolt rendszer megbízhatósága az elemszám növelésével?
11. Mi egy redundáns hideg-tartalékolt rendszer megbízhatóságának elvi felső korlátja?

4. Matematikai alapok

A 3. fejezetben ismertetett fizikai alapok mellett a megfelelő szimulációs modell előállításához elengedhetetlen az alapvető numerikus és algebrai módszerek ismerete, ezért a 4. fejezetben bemutatjuk a lineáris és nem lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldási lehetőségeit, a numerikus deriválási és integrálási módszereket, valamint a differenciálegyenlet rendszerek numerikus közelítésének lehetőségeit.

4.1. Lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldása

Ahogy azt a 3. fejezetben is láthattuk, a fizikai problémáink jelentős része lineáris egyenletekkel írhatóak le, amelyek a numerikus modellezés során a tér és az idő diszkretizálása során egyenletrendszerekké épülnek fel. Ezért a lineáris egyenletrendszerek megoldása a numerikus modellezés gyakorlat legalapvetőbb feladatai közé tartozik.

Tekintsük át a következő általános lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N = b_2 \\ &\ldots \\ &a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \ldots + a_{MN}x_N = b_M \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

amelynek összevont, „mátrixos” alakja a következő:

$$A_{MN}x = b \tag{4.1.2}$$

Az egyenletek száma lehet:

- egyenlő az ismeretlenek számával,
- kevesebb az ismeretlenek számánál (aluldefiniált egyenletrendszer),
- és több az ismeretlenek számánál (túldefiniált egyenletrendszer).

A következőkben először foglalkozzunk a fentiek közül a legegyszerűbb esettel, amikor az ***egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával*** (M=N.)

A lineáris algebra szabályai szerint a 4.1.2 egyenletrendszer legegyszerűbb triviális megoldása:

$$x = A^{-1}b \tag{4.1.3}$$

Az inverz mátrix számításának módja:

$$A^{-1} = \frac{A^T}{\det A} \tag{4.1.4}$$

A determináns számítás módja az elimináció (ld. determ.m, a továbbiakban hivatkozott minden „*m file*" a tárgy weboldaláról szabadon letölthető):

1. Főátlóba nem nulla elemet teszünk oszlopcserével (az oszlopcsere a determináns előjelét megváltoztatja!).
2. Kinullázzuk a főátló alatti elemeket.
3. 1.-2. lépést elvégezzük az összes sorra.
4. A determináns a kapott mátrix főátlóbeli elemeinek szorzata.

A megoldást elvégezhetjük az ún. Cramer-szabály segítségével is (ld: cramer.m):

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \tag{4.1.5}$$

ahol Aj-t úgy kapjuk meg, hogy az A mátrix j-edik oszlopába a b vektort írjuk be.

A megoldás – egyszerűbb esetben akár kézzel is egyszerűen elvégezhető változata – az ún. Gauss-féle eliminációs algoritmus (lásd: gauss.m). Az algoritmus ismertetéséhez nézzük meg a következő háromváltozós egyenletrendszert:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

először vonjuk ki az (első sor) x a_{m1}/a_{11}-et (m=2,3 ; n=1,2,3):

$$\begin{aligned} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 &= b_1^{(0)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)} \end{aligned}$$

ahol $a_{mn}^{(0)} = a_{mn}; \quad b_{mn}^{(0)} = b_{mn}$.

általánosan elvégezve (m, n=2, 3):

$$a_{mn}^{(1)} = a_{mn}^{(0)} - \left(a_{m1}^{(0)} / a_{11}^{(0)}\right) a_{1n}^{(0)}$$
$$b_m^{(1)} = b_m^{(0)} - \left(a_{m1}^{(0)} / a_{11}^{(0)}\right) b_1^{(0)}$$

majd vonjuk ki az (második sor) x $a^{(1)}_{m2}/a^{(1)}_{22}$-t (m=3):

$$\begin{aligned} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 &= b_1^{(0)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 &= b_1^{(2)} \end{aligned}$$

általánosan elvégezve (m, n=3):

$$a_{mn}^{(2)} = a_{mn}^{(1)} - \left(a_{m2}^{(1)} / a_{22}^{(1)}\right) a_{2n}^{(1)}$$
$$b_m^{(2)} = b_m^{(1)} - \left(a_{m2}^{(1)} / a_{22}^{(1)}\right) b_2^{(1)}$$

A fentiek segítségével az egyszerű háromváltozós egyenletrendszerünk a következő alakot ölti:

$$x_3 = b_3^{(2)} / a_{33}^{(2)}$$
$$x_2 = \left(b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} x_3\right) / a_{22}^{(1)}$$
$$x_1 = \left(b_1^{(0)} - a_{12}^{(0)} x_2 - a_{13}^{(0)} x_3\right) / a_{11}^{(0)}$$

Ezek alapján az egyenletrendszer általános Gauss eliminációs megoldási formulája (m=M, M-1,..., 1):

$$x_m = \left(b_m^{(m-1)} - \sum_{n=m+1}^{M} a_{mn}^{(m-1)} x_n \right) / a_{mm}^{(m-1)} \tag{4.1.6}$$

ahol az egyenletrendszer együtthatóira következő m, (n=k+1, k+2,..., M):

$$a_{mn}^{(k)} = a_{mn}^{(k-1)} - \left(a_{mk}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}\right) a_{kn}^{(k-1)} \tag{4.1.7}$$

valamint a konstans tagok (m=k+1, k+2,..., M):

$$b_m^{(k)} = b_m^{(k-1)} - \left(a_{mk}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}\right) b_k^{(k-1)} \tag{4.1.8}$$

A Gauss eliminációs módszer előnye az egyszerű algoritmizálhatóság, hátránya a sok numerikus művelet miatti jelentős számítási (kerekítési) hiba, ami az egyenletek számával lineárisan nő.

A teljesen automatizált Gauss elimináció alkalmazásának egyetlen nehézsége, ha az együttható mátrixunk adott sorának első eleme (amivel éppen osztani akarunk) nulla. Ebben az esetben sorcserét végezhetünk, a következő példán szemléltetett módon:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A sorcsere további előnye, hogy a számítási hiba csökkentésére is használható, annál kisebb a hiba, minél nagyobb számmal osztunk (a k. iterációban):

$$Max\left\{\left|a_{mk}, k \le m \le M\right|\right\} \tag{4.1.9}$$

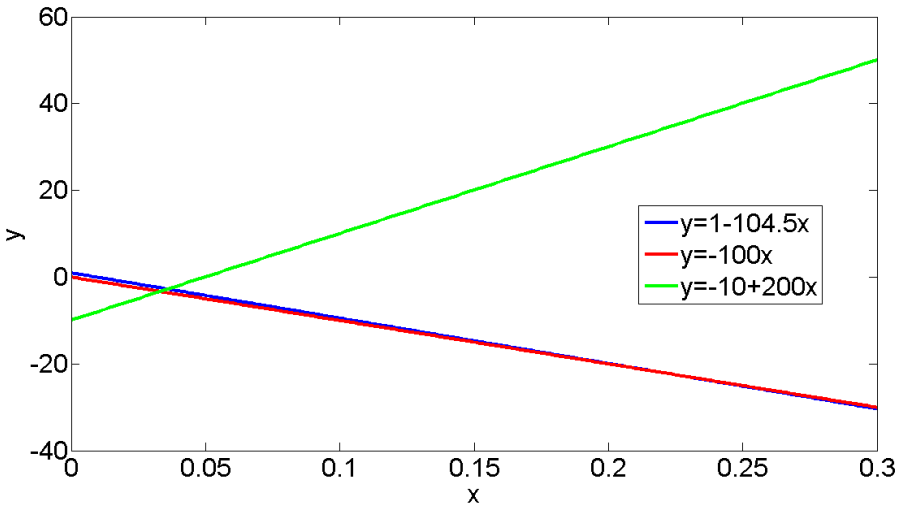
ennél is jobb megoldás:

$$Max\left\{\frac{\left|a_{mk}\right|}{Max\left\{\left|a_{mn}\right|, k \le n \le M\right\}}, k \le m \le M\right\} \tag{4.1.10}$$

A következőkben vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogy vajon, hogyan függ a megoldásunk a bemeneti adatoktól (b)? Tekintsük át a következő két egyenletrendszert (együttható mátrixukkal és bementi adatokkal definiálva):

$$A = \begin{bmatrix} 104.5 & 1 \\ 1 & 0.01 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ és } A = \begin{bmatrix} 104.5 & 1 \\ 1 & -0.005 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$

A szemléletesség kedvéért ábrázoljuk grafikusan a megoldásokat (4.1.1 ábra).



4.1.1. ábra – Grafikus megoldás.

Az ábra alapján megállapíthatjuk, hogy az érzékenység az együtthatómátrixtól függ!

A fenti jelenség pontosabb matematikai leírásához vezessük be a ***kondicionáltság*** fogalmát. A levezetés mellőzésével, az egyenletrendszer

meghatározottságának mértéke a következő értékkel arányos (minél kisebb, annál jobb):

$$condA = \left\| A^{-1} \right\| \cdot \left\| A \right\| \tag{4.1.10}$$

ahol N dim. valós téren p, vagy Hölder norma:

$$\left\| v \right\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{N} \left| v_n \right|^p} \tag{4.1.11}$$

A Hölder norma a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\begin{aligned} &\left\| a \right\| > 0 \quad ha \quad a \neq 0 \\ &\left\| 0 \right\| = 0 \\ &\left\| a + b \right\| \leq \left\| a \right\| + \left\| b \right\| \\ &\left\| ca \right\| = \left| c \right| \cdot \left\| a \right\| \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

A nagy kondíciószámmal rendelkező együtthatómátrixokat lehetőleg el kell kerülni, de legalábbis óvatosan kezelndők. Nagy kondíciószámú együtthatómátrixok esetén az iteratív módszerek nem mindig konvergensek. (A kondicionáltság transzformációval javítható.) Emellett a nagy kondíciószámmal rendelkező mátrixokat felhasználhatjuk tesztelésre. Pl.: a Hilbert-mátrix:

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1} \quad \mathrm{i, j} = 1...\mathrm{n} \tag{4.1.13}$$

A következő részben térjünk át az ***aluldefiniált egyenletrendszerek*** megoldására, ahol az egyenletek száma kevesebb az ismeretlenek számánál (M<N). Az ilyen egyenletrendszereknek lehet végtelen vagy véges sok megoldása.

Az aluldefiniált egyenletrendszerek legelterjedtebb megoldási módszere az ún. ***legkisebb normájú megoldás*** keresése. A módszer lényege a következő: bontsuk fel az x vektorunkat a következők szerint:

$$x = x^{+} + x^{-} \tag{4.1.14}$$

ahol $x^{+} = A^{T}\alpha$ (4.1.15)

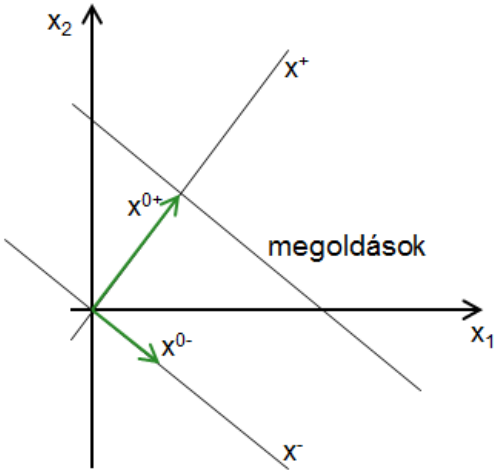
és $Ax^{-} = 0$ (4.1.16)

Helyettesítsük be ezt a megoldandó egyenletbe:

$$A\left(x^{+} + x^{-}\right) = AA^{T}\alpha + Ax^{-} = AA^{T}\alpha = b \tag{4.1.17}$$

A megoldás α-ra: $\alpha^{0} = \left[AA^{T}\right]^{-1} b$ (4.1.18)

Ezzel x^{+} számítható: $x^{0+} = A^{T}\alpha^{0} = A^{T}\left[AA^{T}\right]^{-1} b$ (4.1.19)



4.1.2. ábra – Legkisebb normájú megoldás keresés.

Végezetül foglalkozzunk a ***túldefiniált egyenletrendszerek*** megoldásával, ahol több egyenlet áll rendelkezésünkre, mint változó (M>N). Az ilyen egyenletrendszerek esetében is lehetséges végtelen vagy véges sok megoldás, de az is elképzelhető, hogy egyáltalán nincs megoldás.

Az túldefiniált egyenletrendszerek legelterjedtebb megoldási módszere az ún. ***LSE (least-square error) megoldás*** keresése. A módszer lényege a

következő: minimalizálni kell az egyenlet megoldásának hibáját, azaz a következőt:

$$e = Ax - b \tag{4.1.20}$$

A fent definiált normaképzés segítségével:

$$J = \frac{1}{2}\|e\|^2 = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 = \frac{1}{2}\left[Ax - b\right]^T \left[Ax - b\right] \tag{4.1.21}$$

A 4.1.21 kifejezés minimális, ha x szerinti deriváltja zérus, azaz:

$$\frac{\partial}{\partial x} J = A^T \left[Ax - b\right] = 0 \tag{4.1.22}$$

Ami alapján a megoldás:

$$x^0 = \left[A^T A\right]^{-1} A^T b \tag{4.1.23}$$

A fenti LSE módszert általában rekurzív formában érdemes alkalmazni, amely verzió elnevezése az ***RLSE (Recursive Least-Squares Estimation)***. A módszert tekintsük át egy valós technológiai példával! Egy hőmérsékletfüggő ellenállás rendelkezzen a következő karakterisztikával: c1t+c2=R. Végezzünk méréseket, ahol előállnak a következő mérési eredmények: $\left\{(t_1, R_1), (t_2, R_2), ..., (t_k, R_k)\right\}$. A feladat tehát az alábbi túldefiniált egyenletrendszer megoldása:

$$A_k x_k \approx b_k$$

$$A_k = \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ ... & ... \\ t_k & 1 \end{bmatrix} \quad b_k = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ ... \\ R_k \end{bmatrix} \quad x_k = \begin{bmatrix} c_{1,k} \\ c_{2,k} \end{bmatrix}$$

A fenti LSE módszer alapján a megoldás már ismert: $x_k = \left[A_k^T A_k\right]^{-1} A_k^T b_k$.

De hogyan tudunk egy következő mérési eredményt is figyelembe venni a teljes megoldás újraszámolása nélkül? Másképpen feltéve a kérdést, hogyan állítható elő: $x_{k+1} = \left[A_{k+1}^T A_{k+1} \right]^{-1} A_{k+1}^T b_{k+1}$ a legegyszerűbben? Vezessük be az alábbi jelölésekkel:

$$A_{k+1} = \begin{bmatrix} A_k \\ a_{k+1}^T \end{bmatrix} \quad a_{k+1} = \begin{bmatrix} t_{k+1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad b_{k+1} = \begin{bmatrix} b_k \\ R_{k+1} \end{bmatrix} \quad P_k = \left[A_k^T A_k \right]^{-1} \tag{4.1.24}$$

ezzel:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \left[A_{k+1}^T A_{k+1} \right]^{-1} = \left[\left[A_k^T \quad a_{k+1} \right] \begin{bmatrix} A_k \\ a_{k+1}^T \end{bmatrix} \right]^{-1} = \\ &= \left[A_k^T A_k + a_{k+1} a_{k+1}^T \right]^{-1} = \left[P_k^{-1} + a_{k+1} a_{k+1}^T \right]^{-1} \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

ami átírható a következő alakba (a levezetés mellőzésével):

$$P_{k+1} = P_k - P_k a_{k+1} \left[a_{k+1}^T P_k a_{k+1} + 1 \right]^{-1} a_{k+1}^T P_k \tag{4.1.26}$$

amellyel az eredeti egyenlet:

$$x_{k+1} = x_k + P_{k+1} a_{k+1} \left(R_{k+1} - a_{k+1}^T x_k \right) \tag{4.1.27}$$

A 4.1. fejezet ellenőrző kérdései:

1. Mutassa be a Gauss eliminációs módszert!
2. Mit jelent egy mátrix kondicionáltságának fogalma?
3. Mutassa be a legkisebb normájú megoldás módszerét!
4. Mutassa be az LSE módszert!
5. Mutassa be az RLSE módszert!

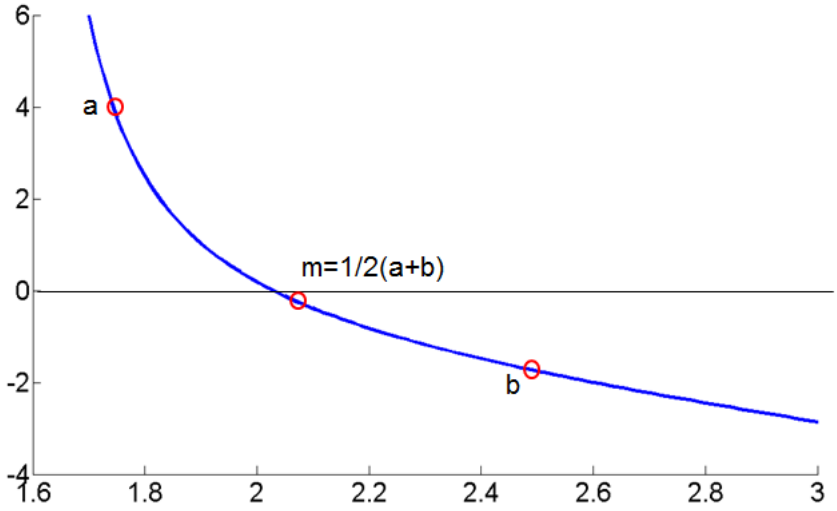
4.2. Nem lineáris egyenletek megoldása

A lineáris egyenletrendszerek megoldásán kívül sok esetben találkozhatunk nem lineáris problémákkal is, ezért most röviden tekintsük át a nem lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldási lehetőségeit.

A nem lineáris egyenletrendszerek megoldásának legegyszerűbb numerikus módszere az ún. ***intervallumfelezéses eljárás***. Az intervallumfelezéses eljáráshoz először hozzuk a megoldandó nem lineáris egyenletet a következő alakra: f(x)=0. A megoldásunk akkor áll elő, ha tudunk úgy választani egy [a, b] intervallumot, ahol f(x) folytonos, f(a) és f(b) előjele pedig különböző. A megoldás menete a következő:

1. számoljuk m=1/2(a+b)-t. Ha f(m)≈0 vagy ½(b-a) ≈0, akkor megállunk.
2. ha f(m)>0, akkor a=m, különben b=m, és vissza a 1. lépéshez.

A megoldást a 4.2.1 ábrán grafikusan is szemléltetjük (egyébként lásd: bisct.m).



4.2.1. ábra – Intervallumfelezéses nem lineáris egyenlet megoldás.

A módszer előnye, hogy nagyon könnyen algoritmizálható, a hátránya viszont, hogy a szükséges iteráció száma nagyban függ az [a, b] intervallum optimális megválasztásától, és így általában magas iteráció számmal jár.

A szükséges iteráció szám csökkentése érdekében vezessük be az ún. ***fixpontos iterációt***. Ha a g(x) függvény folytonos az X^0 egy I=[X^0-e, X^0+e] környezetében és g(x) a következő alakú:

$$g(x) = x \quad és \quad |g'(x)| \le \alpha < 1 \tag{4.2.1}$$

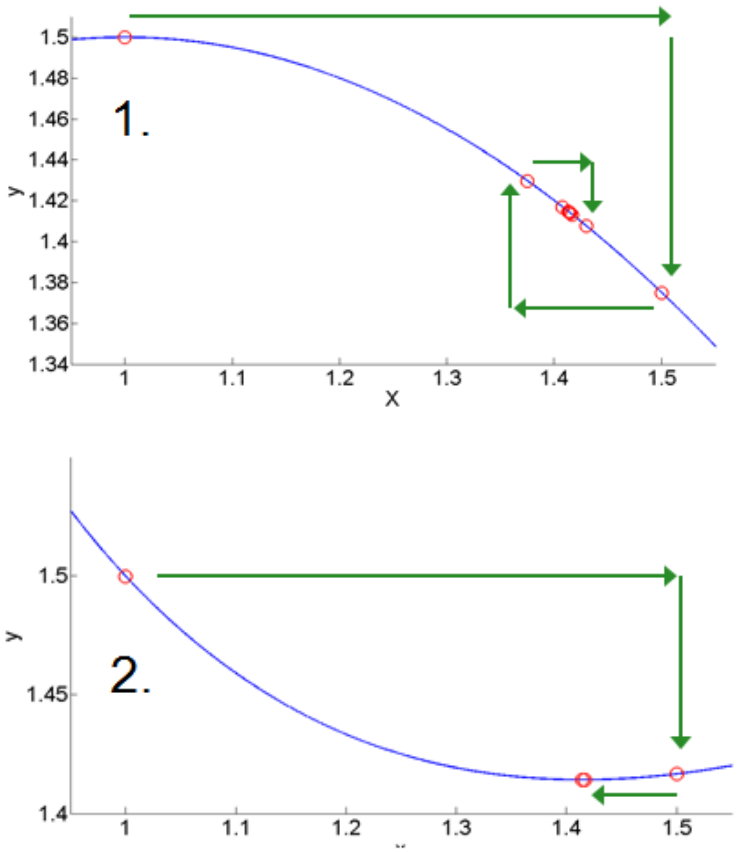
akkor akármelyik x_0 E I pontból indított iteráció x^0-ba konvergál (lásd: fixpt.m). A fixpontos iterációra nézzük a következő példát: g(x)=x^2-2=0, I=(1, 1,5). Először hozzuk az egyenletet g(x)=x alakra:

$$x^2 - 2 = 0 \to x^2 = 2 \to x = 2/x = g_a(x)$$

ekkor $x_0 = 1; x_1 = \frac{2}{x_0} = 2; x_2 = \frac{2}{x_1} = 1; x_3 = \frac{2}{x_2} = 2; \ldots$ mi lehet az oka, hogy nem jutottunk megoldásra? (a $|g'(x)| \le \alpha < 1$ feltétel nem teljesül)! Így rögtön szembesültünk is a fixpontos iteráció legfőbb nehézségével, miszerint a kiindulási függvényalak előállítása nem olyan triviális, mint az intervallumfelezéses eljárás esetén. Az előző példára alkalmazzunk két további kiindulási g(x)=x alakot, amik már teljesítik a deriválási feltételt is:

1. $x^2 - 2 = 0 \to x^2 = 2 \to x = 2/x = g_a(x)$
2. $x^2 - 2 = 0 \to x = \frac{2}{x} \to x + x = \frac{2}{x} + x \to x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = g_c(x)$

Az 1. és 2. kiindulási alak megoldását a 4.2.2 ábrán grafikusan is szemléltettük. Ami rögtön szembetűnő, hogy a konvergencia ugyan gyors, de a szükséges iteráció száma sajnos nagyban függ a választott kiindulási alaktól (g(x)=x). Összességében a fixpontos iterációról elmondható, hogy az intervallumfelezéses eljárásnál nehezebben algoritmizálható, de az egyenlet megoldásához szükséges iterációk száma általában kevesebb.

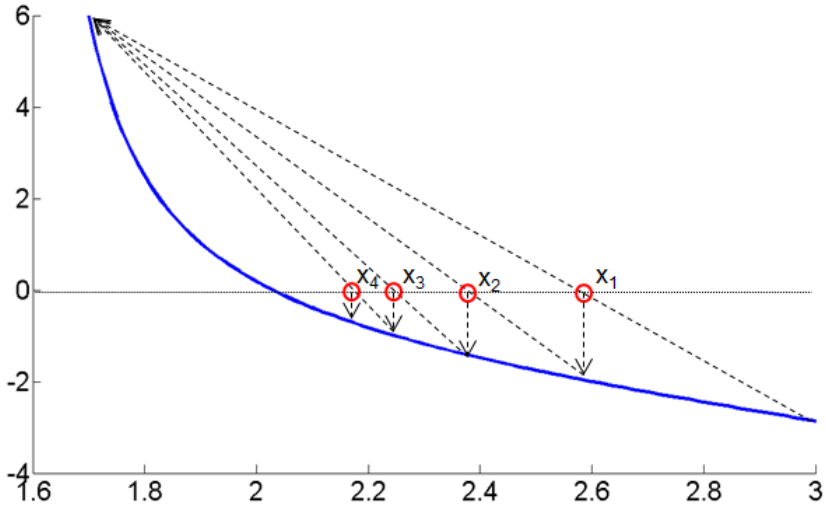


4.2.2. ábra –Nem lineáris egyenlet megoldása fixpontos iterációval.

A következőkben vizsgáljuk meg az ún. **Regula falsi (RF) módszert**, amely módszer bevezetésével az a célunk, hogy az intervallumfelezéses eljárásnál gyorsabb konvergenciát érjünk el, de ugyan akkor megmaradjon az egyszerű algoritmizálhatóság is. A megoldandó nem lineáris egyenletet ismét hozzuk f(x)=0 alakra. A módszer feltételezi, hogy a megoldás egy választott [a,b] intervallumon belül van. A függvényt az (a, f(a)) és a (b, f(b)) pontokra illesztett egyenessel approximálja, és számolja, hogy ez az egyenes hol metszi az x tengelyt (lásd: falsp.m):

$$x = a - \frac{f(a)}{f(a) - f(b)}(b-a) = b - \frac{f(b)}{f(b) - f(a)}(b-a) = \frac{af(b) - bf(a)}{f(a) - f(b)} \quad (4.2.2)$$

A megoldást a 4.2.3 ábrán grafikusan is szemléltetjük.



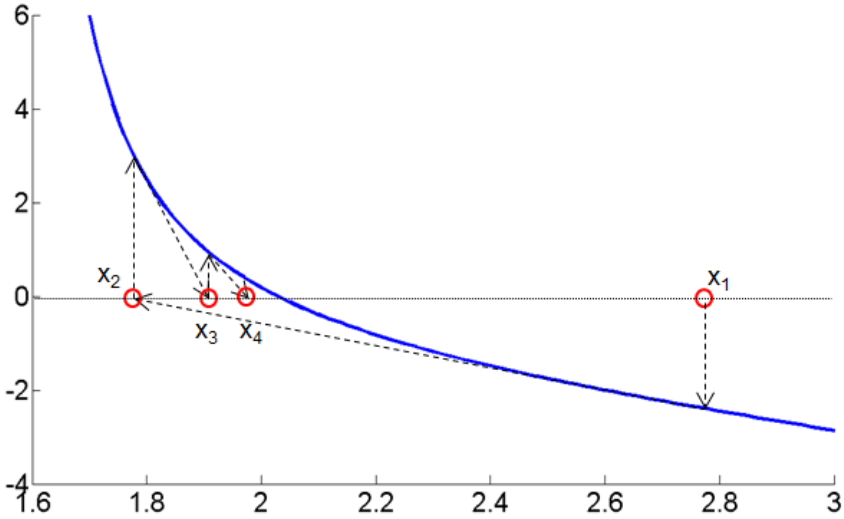
4.2.3. ábra –Nem lineáris egyenlet megoldása RF módszerrel.

Az RF módszer egyszerre hordozza magában az egyszerű algoritmizálhatóságot és a gyors konvergenciát, de sajnos még mindig nagyban függ az [a, b] intervallum optimális megválasztásától.

Ennek a problémának a kiküszöbölésére vezessük be az ún. **Newton-Raphson módszert**, amely módszer esetén – az előzőekkel ellentétben – csak annak kell teljesülnie, hogy f(x) deriváltja folytonos legyen. A megoldandó nem lineáris egyenletet ismét hozzuk f(x)=0 alakra. A módszer a függvényt az x_k pontban vett érintője segítségével approximálja (lásd: newton.m):

$$\begin{aligned} y - f(x_k) &= f'(x_k)(x - x_k) \\ 0 - f(x_k) &= f'(x_k)(x - x_k) \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

A megoldást a 4.2.4 ábrán grafikusan is szemléltetjük. A Newton-Raphson módszer a legtöbb esetben optimális megoldást ad a fent tárgyalt összes problémára (egyszerűség, sebesség, stb.). Léteznek viszont olyan esetek is, amikor az egyetlen feltétele, az f(x) deriválhatósága nem teljesül.



4.2.4. ábra –Nem lineáris egyenlet megoldása Newton-Raphson módszerrel.

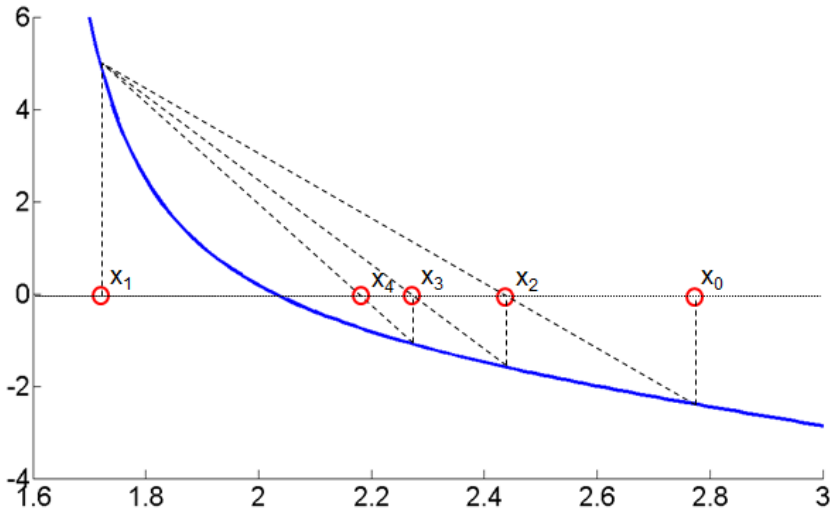
Az ún. **Szelőmódszer (Secant method)** a Newton-Raphson eljárás módosítása, ahol a deriválás helyett az alábbi megközelítést használjuk (lásd: secant.m):

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{dfdx_k} \qquad (4.2.4)$$

$$dfdx_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

(A megoldás előtt a megoldandó nem lineáris egyenletet ebben az esetben is f(x)=0 alakra kell hozni.) A megoldást a 4.2.5 ábrán grafikusan is szemléltetjük. A szelőmódszer tekinthető a legáltalánosabb nem lineáris egyenletet megoldó módszernek, azonban a derivált közelítése miatt a számítási hibája nagyobb, mint a Newton-Raphson módszeré, ezért csak indokolt esetben alkalmazandó!



4.2.5. ábra –Nem lineáris egyenlet megoldása szelő módszerrel.

Végezetül tekintsük át a nem lineáris egyenletrendszerek megoldását Newton módszer segítségével (lásd: newtons.m és jacob.m). A megoldandó egyenletrendszer legyen a kívánt alakra hozva:

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2)&=0\\ f_2(x_1,x_2)&=0 \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

vegyük az egyenletek másodfokú Taylor-sorát:

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2)&\cong f_1(x_{1k},x_{2k})+\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(x_{1k},x_{2k})}(x_1-x_{1k})+\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(x_{1k},x_{2k})}(x_2-x_{2k})=0\\ f_2(x_1,x_2)&\cong f_2(x_{1k},x_{2k})+\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(x_{1k},x_{2k})}(x_1-x_{1k})+\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(x_{1k},x_{2k})}(x_2-x_{2k})=0 \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

hozzuk 4.2.6-ot mátrixos alakra:

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2)\\ f_2(x_1,x_2)\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix} f_1(x_{1k},x_{2k})\\ f_2(x_{1k},x_{2k})\end{bmatrix}+\left.\begin{bmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2\\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2\end{bmatrix}\right|_{(x_{1k},x_{2k})}\begin{bmatrix} x_1-x_{1k}\\ x_2-x_{2k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{4.2.7}$$

4.2.7 iteratív megoldási formulája a következő:

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 \end{bmatrix}^{-1}_{(x_{1k}, x_{2k})} \begin{bmatrix} f_1(x_{1k}, x_{2k}) \\ f_2(x_{1k}, x_{2k}) \end{bmatrix} \tag{4.2.8}$$

összevont alakban pedig:

$$x_{k+1} = x_k - J_k^{-1} f(x_k) \tag{4.2.9}$$

ahol J a Jacobi mátrix: $J_k(m,n) = \left[\frac{\partial f_m}{\partial x_n} \right]\Bigg|_{x_k}$ (4.2.10)

A 4.2. fejezet ellenőrző kérdései:

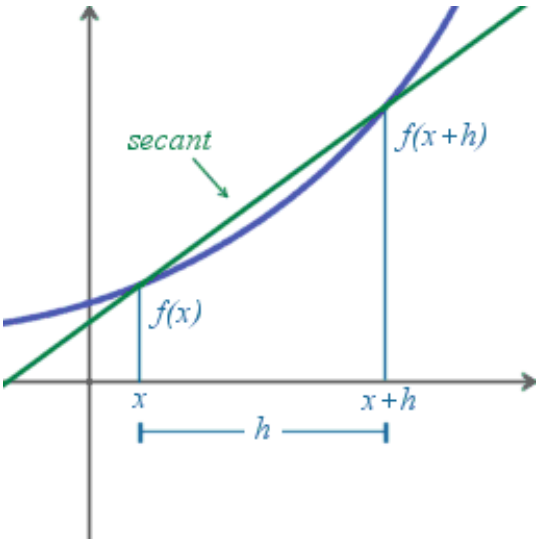
1. Mutassa be az intervallumfelezéses eljárást!
2. Mutassa be a fixpontos iterációt!
3. Hasonlítsa össze az intervallumfelezéses eljárást a fixpontos iterációval!
4. Mutassa be a Newton-Raphson módszert!
5. Mutassa be a szelőmódszert!

4.3. Numerikus deriválás

A technológiai folyamatmodellezés során a lineáris egyenletrendszerek megoldása mellett a másik leggyakoribb feladat a deriválás. Ezért a következőkben tekintsük át a numerikus deriválás különféle módszereit, azok előnyeit és hátrányait.

A deriválás matematikai definíciója a következő (4.3.1 ábrán grafikusan is szemléltetve):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4.3.1}$$



4.3.1. ábra –Deriválás.

ahol h a deriválás lépésköze. Numerikus számításnál sajnos a 4.3.1 képlet nem használható. Közelítsük a legegyszerűbb módon:

$$D_{f1}(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4.3.2}$$

Ha h-t elég kicsire választjuk, akkor a közelítés hibája is kicsi lesz, de mekkora? A kérdés megválaszolásához fejtsük sorba f(x,h)-t x körül:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \ldots \tag{4.3.3}$$

mindkét oldalból kivonva f(x)-et, majd osztva h-val a következő alakra jutunk:

$$\begin{aligned} D_{f1}(x,h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f^{(2)}(x) + \frac{h^2}{3!} f^{(3)}(x) \ldots = \\ &= f'(x) + O(h) \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

ahol O(h) a hibatag: $O(h) = \frac{h}{2} f^{(2)}(x) + \frac{h^2}{3!} f^{(3)}(x) \ldots$ (4.3.5)

azaz a közelítésünk hibája ~h-val arányos lesz. A következőkben próbáljuk meg csökkenteni ezt a hibát! A hiba csökkentése érdekében írjunk a 4.3.2 egyenletbe 2h-t és végezzük el a sorfejtést is:

$$D_{f1}(x,2h) = \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} = f'(x) + \frac{2h}{2} f^{(2)}(x) + \frac{4h^2}{3!} f^{(3)}(x) + \ldots \tag{4.3.6}$$

majd 4.3.6 segítségével írjuk fel a következő egyenletet:

$$\begin{aligned} 2D_{f1}(x,h) - D_{f1}(x,2h) &= 2\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} = \\ &= f'(x) - \frac{2h^2}{3!} f^{(3)}(x) \ldots \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

amiből magát a deriváltat kifejezve a következőre jutunk:

$$\begin{aligned} D_{f2}(x,h) &= \frac{2D_{f1}(x,h) - D_{f1}(x,2h)}{2-1} = \\ &= \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} = f'(x) + O(h^2) \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

vagyis a hibát csökkenteni tudtuk, mivel már csak ~h^2-el arányos (feltételezve, hogy h<1)!

A 4.3.2-ben előre megtett h lépést természetesen megtehetjük „visszafelé is”:

$$D_{b1}(x,h)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}=D_{f1}(x,-h) \tag{4.3.9}$$

amely esetben az ***ún. „backward” (hátrafelé lépő) deriválási formulához*** jutunk. (A fentiekben eddig ***az ún. „forward”, azaz előrelépő formulával*** foglalkoztunk.) A hátralépő 4.3.9 formula közelítési hibáját a fenti módszer segítségével szintén javíthatjuk (a levezetés mellőzése nélkül):

$$\begin{aligned} D_{b2}(x,h)&=\frac{2D_{b1}(x,h)-D_{b1}(x,2h)}{2-1}=\frac{3f(x)+4f(x-h)+f(x-2h)}{2h}= \\ &=f'(x)+O(h^2) \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

A közelítési hiba további csökkentése céljából írjuk fel az f(x+h) és az f(x-h) 5-öd fokú Taylor sorát:

$$\begin{aligned} f(x+h)&=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f^{(2)}(x)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x)+ \\ &+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x)+\ldots \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

$$\begin{aligned} f(x-h)&=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f^{(2)}(x)-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x)+ \\ &+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x)+\ldots \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Ha a 4.3.11-et és 4.3.12-őt kivonjuk egymásból, majd elosztjuk 2h-val, megkapjuk az ún. ***centrális közelítés formuláját***:

$$\begin{aligned} D_{c2}(x,h)&=\frac{f(x+h)-f\left(x-h\right)}{2h}=f'(x)+\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x)+ \\ &+\frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x)+\ldots=f'(x)+O(h^2) \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

A fentiek alapján látható, hogy a centrális formula közelítési hibája már a kiindulásnál O(h^2) azaz ~h^2-el arányos. Amit a fent tárgyalt módszerünk segítségével tovább javíthatunk, ha h helyére 2h-t írunk:

$$2^2 D_{c2}(x,h) - D_{c2}(x,2h) = 4\frac{f(x+h) - f\left(x-h\right)}{2h} - \\ -\frac{f(x+2h) - f\left(x-2h\right)}{2\cdot 2h} = 3f'(x) - \frac{12h^4}{5!} f^{(5)}(x) - \ldots \tag{4.3.14}$$

4.3.14-ből kifejezve a derivált tagot:

$$D_{c4}(x,h) = \frac{2^2 D_{c1}(x,h) - D_{c1}(x,2h)}{2^2 - 1} = \\ = \frac{8f(x+h) - 8f(x-h) - f(x+2h) + f(x-2h)}{12h} = f'(x) + O(h^4) \tag{4.3.15}$$

Látható, hogy a javított centrális formula közelítési hibája már csak O(h^4), azaz ~h^4-el arányos. (Természetesen mindvégig feltételezve, hogy h<1!)

Felvetődhet a kérdés, hogy a fenti módszer (2h beírása) rekurzív alkalmazásával még tovább javítható-e a már egyszer javított 4.3.15, 4.3.10 vagy a 4.3.8 deriválási formulák közelítés hibája? A válasz igen, a javítás akármeddig folytatható a módszer átalánosított verziójával, amit Richardson extrapolációnak nevezünk. Az előrelépő, a hátralépő és a centrális formulára a Richardson extrapoláció (a levezetés mellőzésével) a következő:

$$D_{f,n+1}(x,h) = \frac{2^n D_{f,n}(x,h) - D_{f,n}(x,2h)}{2^n - 1} \\ D_{b,n+1}(x,h) = \frac{2^n D_{b,n}(x,h) - D_{b,n}(x,2h)}{2^n - 1} \\ D_{c,2(n+1)}(x,h) = \frac{2^{2n} D_{c,2n}(x,h) - D_{c,2n}(x,2h)}{2^{2n} - 1}\ ) \tag{4.3.16}$$

A gyakorlatban azonban egy- esetleg kétlépéses javításnál nem szoktak többet alkalmazni, mivel a további lépések hatása már általában kisebb, mint a következőkben tárgyalt kerekítési hiba hatása.

Az előzőek alapján a numerikus deriválás közelítési hibája csökkenthető, ha h-t kicsire választjuk. Mivel a numerikus műveletek véges digiten tárolt számokon végezzük, ezért nem szabad megfeledkezni a kerekítési hiba hatásáról. A teljes (valós) hiba számításához írjuk fel a kerekítési hibával módosított értékeket:

$$\begin{array}{lcl} f(x+2h) & & y_2 = f(x+2h)+e_2 \\ f(x+h) & & y_1 = f(x+h)+e_1 \\ f(x) & \longrightarrow & y_0 = f(x)+e_0 \\ f(x-h) & & y_{-1} = f(x-h)+e_{-1} \\ f(x-2h) & & y_{-2} = f(x-2h)+e_{-2} \end{array} \tag{4.3.17}$$

ahol $|e_i| \le \varepsilon$. A 4.3.17-ben szereplő kifejezések segítségével a deriválás valós hibájának felírása az előrelépő formula esetén:

$$\begin{aligned} D_{f1}(x,h) &= \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{f(x+h)+e_1 - f(x) - e_0}{h} = \\ &= f'(x) + \frac{e_1 - e_0}{h} + \frac{f^{(2)}(x)}{2}h \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Fejezzük ki a hiba abszolút értékét:

$$\left|D_{f1}(x,h) - f'(x)\right| \le \left|\frac{e_1 - e_0}{h}\right| + \frac{\left|f^{(2)}(x)\right|}{2}h \le \frac{2\varepsilon}{h} + \frac{\left|f^{(2)}(x)\right|}{2}h \tag{4.3.19}$$

4.3.19 alapján a valós hiba felső határának létezik egy optimuma (minimuma) (ez legyen h_0):

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{2\varepsilon}{h} + \frac{\left|f^{(2)}(x)\right|}{2}h\right) = -\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{\left|f^{(2)}(x)\right|}{2} = 0 \tag{4.3.20}$$

$$h_0 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\left|f^{(2)}(x)\right|}} \tag{4.3.21}$$

A fenti felírást (4.3.18) elvégezhetjük a centrális tagra is:

$$\begin{aligned} D_{c2}(x,h) &= \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \frac{f(x+h)+e_1 - f(x-h) - e_{-1}}{2h} = \\ &= f'(x) + \frac{e_1 - e_{-1}}{2h} + \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^2 \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Ismét fejezzük ki a valós hiba abszolút értékét:

$$\left|D_{c2}(x,h) - f'(x)\right| \le \left|\frac{e_1 - e_{-1}}{2h}\right| + \frac{\left|f^{(2)}(x)\right|}{6}h^2 \le \frac{2\varepsilon}{2h} + \frac{\left|f^{(3)}(x)\right|}{6}h^2 \tag{4.3.23}$$

amelyből az optimum értéke:

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{\varepsilon}{h} + \frac{\left|f^{(3)}(x)\right|}{6}h^2\right) = -\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{\left|f^{(3)}(x)\right|}{3}h = 0 \tag{4.3.24}$$

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{\left|f^{(3)}(x)\right|}} \tag{4.3.25}$$

Végezetül a javított centrális tag (4.3.15) valós hibája a következő:

$$\begin{aligned} \left|D_{c4}(x,h) - f'(x)\right| &\le \left|\frac{8e_1 - 8e_{-1} - e_2 + e_{-2}}{12h}\right| + \frac{\left|f^{(5)}(x)\right|}{30}h^4 \le \\ &\le \frac{18\varepsilon}{12h} + \frac{\left|f^{(5)}(x)\right|}{30}h^4 \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{3\varepsilon}{2h} + \frac{\left|f^{(5)}(x)\right|}{30}h^4\right) = -\frac{3\varepsilon}{2h^2} + \frac{2\left|f^{(5)}(x)\right|}{15}h^3 = 0 \tag{4.3.27}$$

$$h_0 = \sqrt[5]{\frac{45\varepsilon}{4\left|f^{(5)}(x)\right|}} \tag{4.3.28}$$

Ha megfigyeljük h_0 alakulását az egyes esetekben, a következő tanulságok vonhatók le:

- Ha h-t csökkentjük, a pontosságunk elvileg növekszik (mivel a Taylor sor egyre több elemét vesszük figyelembe, ha úgy tetszik), viszont a kerekítési hiba nő. A hibát tehát nem csökkenthetjük tetszőlegesen. Ez az ún. „step-size", más néven lépésköz dilemma.
- A fentiek alapján teljes (valós) hibára elvileg tudunk számolni egy optimális h_0 értéket, azonban valós feladatoknál a felsőbbrendű deriváltak nem ismertek, így h_0 nem számolható.
- A h_0 értéke szinte biztosan változik az értelmezési tartományon. Még ha ki is tudjuk számolni, akkor azt sajnos sok helyen kell.
- Végezetül h_0 nem minimalizálja a hibát, hanem csak a felső határát adja meg. A hiba pontos értékét nem tudjuk meg belőle!

A fentiek alapján a megfelelő lépésköz megválasztása általában tapasztalat (próbálkozás) útján történik, ún. „grid dependency" vizsgálatok segítségével. Ahol addig finomítjuk az alkalmazott lépésközt (a rácsot), amíg a számítási eredmény jelentős változással reagál a finomításra.

A következőkben röviden vizsgáljuk meg, hogyan tudunk előállítani magasabb rendű deriváltakat. A második derivált közelítő formulájának felírásához használjuk fel f(x+h) és f(x-h) 5-öd fokú Taylor-sorát (4.3.11 és 4.3.12). Adjuk össze a két egyenletet, vonjunk ki 2f(x)-et, és osszuk el h^2-tel, így megkapjuk a másodrendű derivált centrális közelítő formuláját:

$$\begin{aligned} D_{c2}^{(2)}(x,h) &= \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = \\ &= f^{(2)}(x)+\frac{h^2}{12}f^{(4)}(x)+\frac{2h^4}{6!}f^{(6)}(x)+\ldots = f^{(2)}(x)+O(h^2) \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

A Richardson extrapolációt alkalmazva a közelítés hiba itt is csökkenthető:

$$\frac{2^2 D_{c2}^{(2)}(x,h) - D_{c2}^{(2)}(x,2h)}{2^2 - 1} =$$
$$\frac{-f(x+2h)+16f(x+h)-30f(x)+16f(x-h)-f(x-2h)}{12h^2} = \tag{4.3.30}$$
$$= f^{(2)}(x) - \frac{h^4}{90} f^{(5)}(x) + \ldots$$

4.3.30-ból kifejezve a derivált tagot:

$$D_{c4}^{(2)}(x,h) = \frac{-f(x+2h)+16f(x+h)-30f(x)+16f(x-h)-f(x-2h)}{12h^2} = \tag{4.3.31}$$
$$= f^{(2)}(x) + O(h^4)$$

Látható, hogy a közelítési hiba itt is $O(h^4)$-re csökkent.

Másodrendű deriváltnál magasabb fokú derivált közelítésének általánosításához írjuk fel a következőt:

$$D_{c4}^{(2)}(x,h) = \frac{c_2 f_2 + c_1 f_1 + c_0 f_0 + c_{-1} f_{-1} + c_{-2} f_{-2}}{h^2} \tag{4.3.32}$$

ahol $f_k = f(x+kh)$ (4.3.33)

írjuk be 4.3.32-be az f_k függvényeke Taylor sorát:

$$D_{c4}^{(2)}(x,h) = \frac{1}{h^2}\left[\begin{array}{l} c_2\left(f_0 + 2hf'_0 + \frac{(2h)^2}{2} f_0^{(2)} + \frac{(2h)^3}{3!} f_0^{(3)} + \frac{(2h)^4}{4!} f_0^{(4)} + \ldots \right) \\ +c_1\left(f_0 + hf'_0 + \frac{h^2}{2} f_0^{(2)} + \frac{h^3}{3!} f_0^{(3)} + \frac{h^4}{4!} f_0^{(4)} + \ldots \right) + c_0 f_0 \\ +c_{-1}\left(f_0 - hf'_0 + \frac{h^2}{2} f_0^{(2)} - \frac{h^3}{3!} f_0^{(3)} + \frac{h^4}{4!} f_0^{(4)} - \ldots \right) \\ +c_{-2}\left(f_0 - 2hf'_0 + \frac{(2h)^2}{2} f_0^{(2)} - \frac{(2h)^3}{3!} f_0^{(3)} + \frac{(2h)^4}{4!} f_0^{(4)} - \ldots \right) \end{array}\right] \tag{4.3.34}$$

Alkalmazzuk a következő kiemeléseket:

$$D_{c4}^{(2)}(x,h)=\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix}\left(c_2+c_1+c_0+c_{-1}+c_{-2}\right)f_0+h\left(2c_2+c_1-c_{-1}-2c_{-2}\right)f'_0\\ +h^2\left(\frac{2^2}{2}c_2+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{2}c_{-1}+\frac{2^2}{2}c_{-2}\right)f_0^{(2)}\\ +h^3\left(\frac{2^3}{3!}c_2+\frac{1}{3!}c_1-\frac{1}{3!}c_{-1}-\frac{2^3}{3!}c_{-2}\right)f_0^{(3)}\\ +h^4\left(\frac{2^4}{4!}c_2+\frac{1}{4!}c_1+\frac{1}{4!}c_{-1}+\frac{2^4}{4!}c_{-2}\right)f_0^{(4)}+\ldots\end{bmatrix} \tag{4.3.35}$$

Így a fenti c együtthatókat az alábbi egyenletrendszer megoldásával nyerjük (lásd: difapx.m):

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2\\ 2^2/2! & 1/2! & 0 & 1/2! & 2^2/2!\\ 2^3/3! & 1/3! & 0 & -1/3! & -2^3/3!\\ 2^4/4! & 1/4! & 0 & 1/4! & 2^4/4!\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_2\\ c_1\\ c_0\\ c_{-1}\\ c_{-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{4.3.36}$$

Az előzőekben bemutatott módszer csak abban az esetben működik, ha az f(x) függvény adott, azonban ez gyakorlati feladatoknál nem feltétlenül teljesül. Ha a függvény csak adatpárokkal adott, a deriválás az interpoláló polinom együtthatóinak felhasználásával lehetséges (lásd: diflag.m). Egy MATLAB-ba beépített függvény segítségével van lehetőség szimbolikus deriválásra is (diff.m).

A 4.3. fejezet ellenőrző kérdései:

1. Mutassa be az előre- és hátralépő, valamint a centrális deriválási formulát!
2. Mutassa be a Richardson extrapolációt az előrelépő deriválási formulára alkalmazva!
3. Hogyan fejezhető ki az előre- és hátralépő, valamint a centrális deriválási formula közelítési hibája?
4. Vezesse le az előrelépő deriválási formula teljes (valós) hibáját!
5. Miket kell figyelembe venni a lépésköz kiválasztása során?
6. Vezesse le a másodrendű derivált centrális formuláját!
7. Hogyan tudunk másodrendűnél magasabb rendű deriváltat számítani?

4.4 Numerikus integrálás

A technológiai folyamatmodellezés során a numerikus deriválás mellett gyakorta szükséges a numerikus integrálás ismerete is. Ezért a következőkben tekintsük át a numerikus integrálás különféle módszereit, azok előnyeit és hátrányait.

A határozott integrál numerikus közelítésének legáltalánosabb formája a következő:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{k=0}^{N} \omega_k f\left(x_k\right) \tag{4.4.1}$$

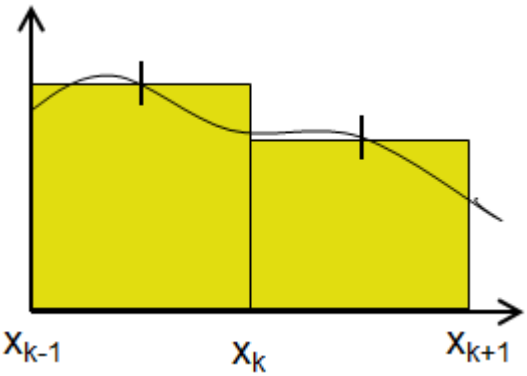
ahol $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ (4.4.2)

A fenti módszer legegyszerűbb megvalósítása a ***téglalappal történő közelítés***:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \cong hf_{mk} \tag{4.4.3}$$

ahol $h = x_{k+1} - x_k; \quad f_{mk} = f\left(x_{mk}\right); \quad x_{mk} = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ (4.4.4)

a 4.4.1 ábra alapján.



4.4.1. ábra –Téglalappal történő közelítés.

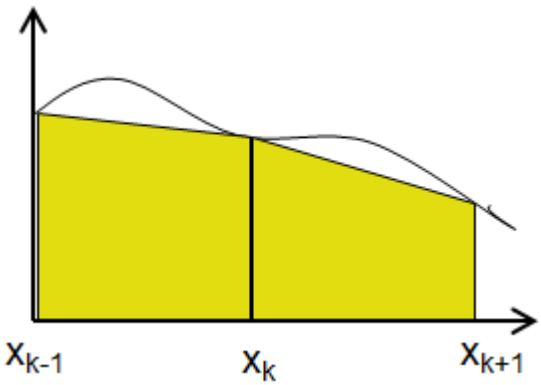
A módszer előnye az igen egyszerű algoritmizálhatóság, hátránya viszont a nagyfokú pontatlanság. A téglalappal történő közelítés hibája csökkenthető, ha a közelítés során nem téglalapokat, hanem trapézokat alkalmazunk.

Trapézzal történő közelítés:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left(f_k + f_{k+1}\right) \tag{4.4.5}$$

ahol $h = x_{k+1} - x_k; \quad f_k = f\left(x_k\right)$ (4.4.6)

a 4.4.2 ábra alapján.



4.4.2. ábra –Trapézzal történő közelítés.

A módszer általános (algoritmizálható) formulájának levezetéséhez az [a,b] intervallumot osszuk N részre:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left[\left(f_0 + f_1\right) + \left(f_1 + f_2\right) + \ldots + \left(f_{N-1} + f_N\right)\right] \tag{4.4.7}$$

így a teljes integrál értéke (lásd: trpzds.m):

$$I_T(a,b,h) = h\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(x_k\right)\right) \tag{4.4.8}$$

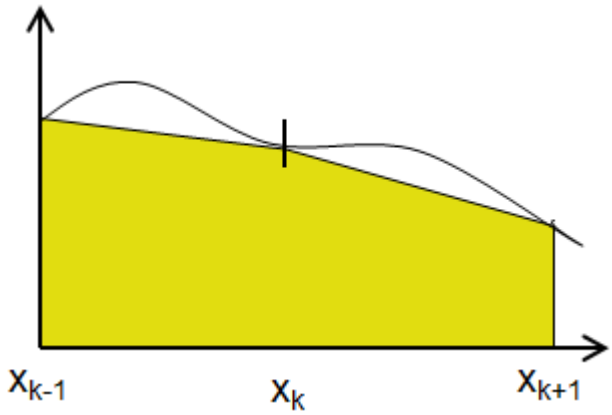
A trapézzal történő közelítés hibája már jóval kisebb, mint a téglalapos megoldása és még mindig egyszerűen algoritmizálható. Pontossága azonban gyorsan változó függvények esetén már nem elégséges.

A pontosság további javítása érdekében közelítsük az integrál értékét egy polinommal, az ún. ***Simpson formula*** segítségével:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1} \right) \tag{4.4.9}$$

ahol $h = \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2}; \quad f_k = f\left(x_k\right)$ (4.4.10)

a 4.4.3 ábra alapján. A következőkben vezessük le, hogyan jutunk a 4.4.9 kifejezéshez!



4.4.3. ábra –Simpson formula.

A formula származtatásához az egyszerűség kedvéért a függvényt toljuk el az x tengelyen x_k-val, vagy másképpen, csináljunk egy $t=x-x_k$ helyettesítést, így az f(x) három pontjának felírása a következőre változik:

$$x = \left\{ x_k - h, x_k, x_k + h \right\} \tag{4.4.11}$$

azaz $t = \left\{ -h, 0, +h \right\}$ (4.4.12)

A feladat megoldásához az alábbi polinom együtthatóit kell megtalálnunk:

$$p_2(t) = c_1 t^2 + c_2 t + c_3 \tag{4.4.13}$$

a megoldáshoz a helyettesítésben szereplő pontokat tesszük egyenlővé egymással ((-h,f_{k-1}), (0,f_k), (h,f_{k+1})), így az alábbi egyenletrendszerből kapjuk az együtthatókat:

$$\begin{aligned} p_2(-h) &= c_1(-h)^2 + c_2(-h) + c_3 = f_{k-1} \\ p_2(0) &= c_1 0^2 + c_2 0 + c_3 = f_k \\ p_2(+h) &= c_1(+h)^2 + c_2(+h) + c_3 = f_{k+1} \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

innen: $c_3 = f_k; \quad c_2 = \dfrac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2h}; \quad c_1 = \dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{f_{k+1} + f_{k-1}}{2} - f_k\right)$ (4.4.15)

Integráljuk a polinomot a t intervallumon:

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^{h} p_2(t)dt = \frac{1}{3}c_1 t^3 + \frac{1}{2}c_2 t_2 + c_3 t\Big|_{-h}^{h} = \frac{2}{3}c_1 h^3 + 2c_3 h = \\ &\frac{2h}{3}\left(\frac{f_{k+1} + f_{k-1}}{2} - f_k + 3f_k\right) = \frac{h}{3}\left(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}\right) \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

A módszer általános (algoritmizálható) formulája a fentiek alkalmazásával:

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x)dx = \sum_{m=0}^{N/2-1} \int_{x_{2m}}^{x_{2m+2}} f(x)dx \cong \\ &\cong \frac{h}{3}\left[\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right) + \left(f_2 + 4f_3 + f_4\right) + \ldots\left(f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N\right)\right] \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

így a teljes integrál értéke (lásd: smpns.m):

$$I_S(a,b,h)=\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{m=0}^{N/2-1}f\left(x_{2m+1}\right)+2\sum_{m=1}^{N/2-1}f\left(x_{2m}\right)\right]=$$
$$=\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+2\left(2\sum_{m=0}^{N/2-1}f\left(x_{2m+1}\right)+\sum_{k=1}^{N/2-1}f\left(x_k\right)\right)\right] \tag{4.4.18}$$

A Simpson formula előnye a nagyfokú pontosság, hátránya az előző módszerekhez képest a nehezebb algoritmizálhatóság. Mindezek ellenére ez a leggyakrabban alkalmazott numerikus integrálási módszer.

Csak úgy, mint a numerikus deriválás esetén, a numerikus integrálás során is lehetséges a közelítési hiba csökkentése a következő módszerek segítségével:

- Hibajavító rekurzív formula alkalmazása, amely ha a hiba nem elfogadható, addig felezi h értékét, amíg elérjük a kívánt szintet.
- A hiba csökkentése Richardson extrapoláció alkalmazásával.

Példaképpen a trapézmódszer rekurzív változata a következő:

$$I_{T2}\left(a,b,\frac{h}{2}\right)=\frac{h}{2}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{2N-1}f\left(x_{k/2}\right)\right)=$$
$$=\frac{h}{2}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{m=1}^{N/2-1}f\left(x_{2m}\right)+\sum_{m=0}^{N/2-1}f\left(x_{(2m+1)}\right)\right)= \tag{4.4.19}$$
$$=\frac{1}{2}\left(I_{T2}(a,b,h)+h\sum_{m=0}^{N/2-1}f\left(x_{(2m+1)}\right)\right)$$

Most alkalmazzuk a trapézmódszerre a Richardson extrapolációt:

$$I_{T4}(a,b,h)=\frac{2^2 I_{T2}(a,b,h)-I_{T2}(a,b,2h)}{2^2-1}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[4\frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{m=1}^{N-1}f\left(x_{2m-1}\right)\right)-\frac{2h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{m=1}^{N/2-1}f\left(x_{2m}\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{h}{3}\left\{f(a)+f(b)+4\sum_{m=1}^{N/2}f\left(x_{2m-1}\right)+2\sum_{m=1}^{N/2-1}f\left(x_{2m}\right)\right\}=I_{S4}(a,b,h)$$

(4.4.20)

Vegyük észre, hogy visszajutottunk a Simpson formulához! Ha a rekurzív formulába (4.4.20-ban) a h-t átírjuk h/2-re a következő alakra jutunk:

$$I_{T4}\left(a,b,\frac{h}{2}\right)=\frac{2^2 I_{T2}\left(a,b,h/2\right)-I_{T2}(a,b,h)}{2^2-1} \tag{4.4.21}$$

amelyből felírható az algoritmizálható változat:

$$I_{T2(n+1)}\left(a,b,2^{-(k+1)}h\right)=\frac{2^{2n} I_{T,2n}\left(a,b,2^{-(k+1)}h\right)-I_{T,2n}(a,b,2^{-k}h)}{2^{2n}-1} \tag{4.4.22}$$

ahol $n\geq 1, k\geq 0$.

Az így kapott eljárás az ún. ***Romberg integrál***, melynek lényege, hogy minden lépésben finomítjuk a megoldást, számítjuk a hibát, és amikor az utóbbi egy kívánt érték alá csökken, megállunk. A hiba értéke a k. lépésben (a levezetés mellőzésével):

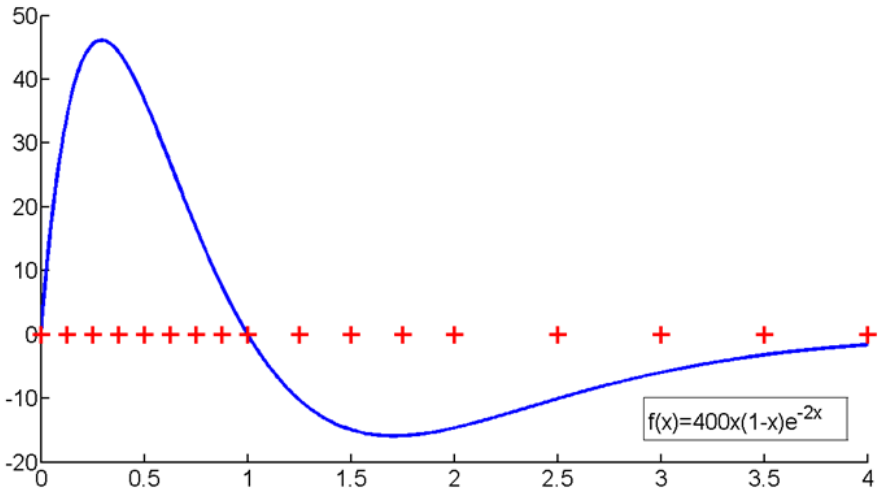
$$\left|E_{T,2(k+1)}\left(2^{-k}h\right)\right|\approx\frac{1}{2^{2k}-1}\left|I_{T,2k}\left(2^{-k}h\right)-I_{T,2k}\left(2^{-(k-1)}h\right)\right| \tag{4.4.23}$$

A Romberg integrál számítását az ún. Romberg táblázat (vagy mátrix) segítségével a 4.4.4 ábrán szemléltetjük (lásd: rmbrg.m). Ahogy az a táblázatban is látható, egy-egy szint eléréséhez az összes korábbi szintet be kell járnunk, azaz a számításhoz szükséges idő a lineárisnál nagyobb mértékben növekszik!

Az előzőekben bemutatott módszerek tulajdonságai tovább javíthatók, ha az apertúra (h) „alkalmazkodik” a függvény meredekségéhez, ez az ötlet vezet az adaptív integrálás gondolatához (lásd: adap_smpsn.m). A módszert a 4.4.5 ábrán szemléltetjük.

Iteráció, k	Apertúra, h	n=1	n=2	n=3	...
0	h_0	$I_{T,2}(h_0)$			
		$\downarrow *$	$\xrightarrow{**}$		
1	$2^{-1}h_0$	$I_{T,2}(2^{-1}h_0)$	$I_{T,4}(2^{-1}h_0)$		
		$\downarrow *$	$\xrightarrow{**}$	$\xrightarrow{**}$	
2	$2^{-2}h_0$	$I_{T,2}(2^{-2}h_0)$	$I_{T,4}(2^{-2}h_0)$	$I_{T,6}(2^{-2}h_0)$	
...	...	...	...	...	...

4.4.4. ábra – Romberg integrál számítását Romberg táblázat segítségével.



4.4.5. ábra – Adaptív integrálás.

Más szóval gyors változás esetén sűrítjük a „mintavételt” a függvényből, lassú változásnál pedig ritkítjuk.

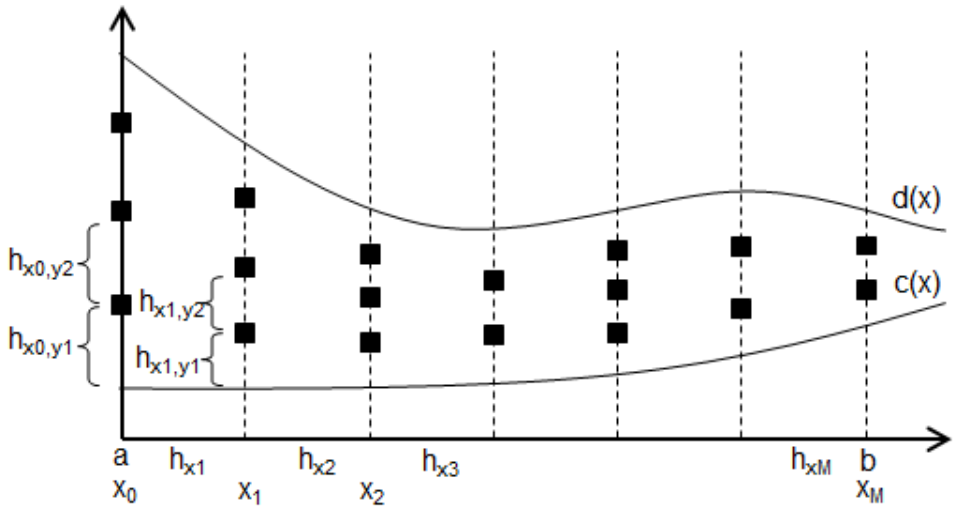
Végezetül lássunk egy példát a ***kettős integrál*** számítására, amit a fentiekkel teljesen analóg módon végezhetünk. Kettős integrál: f(x,y) integráljának számítása az $R=\{(x,y)|a\le x\le b, c(x)\le y\le d(x)\}$ intervallumon:

$$I=\iint_R f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy\right)dx \tag{4.4.24}$$

A numerikus integrálást először az egyik, majd a másik változó mentén végezzük el:

$$I\left(a,b,c(x),d(x)\right)=\sum_{m=1}^{M}\omega_m\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n f\left(x_m,y_{m,n}\right) \tag{4.4.25}$$

a 4.4.6 ábra alapján (lásd: int2a.m és smpsns_fxy.m).



4.4.6. ábra – Kettős numerikusintegrálás.

A 4.4. fejezet ellenőrző kérdései:

1. Mutassa be a téglalappal és a trapézzal történő közelítés módszerét!
2. Mutassa be a Simpson formulát!
3. Hogyan javítható a numerikus integrálás közelítési hibája? Mutasson be egy módszert!
4. Definiálja a Romberg integrált!
5. Mutassa be az adaptív numerikus integrálást!
6. Mutassa be a kettős numerikus integrálást!

4.5. Differenciál egyenletek megoldása véges differencia módszerrel

A 4.3 fejezetben megismerkedtünk a numerikus deriválási módszerekkel, amit jelen fejezetben arra fogunk felhasználni, hogy a technológiai folyamatmodellezés során felmerülő differenciál egyenleteket numerikusan megoldjuk.

Először vegyük a következő egyszerű differenciál egyenletet:

$$y'(t) + a \cdot y(t) = r \tag{4.5.1}$$

ahol $y(0) = y_0$. 4.5.1 analitikus megoldása Laplace-transzformáció segítségével:

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{r}{a} \right) \cdot \exp\left(-a \cdot t\right) + \frac{r}{a} \tag{4.5.2}$$

Ahogy azt korábban már tárgyaltuk, az analitikus megoldás nem biztos hogy létezik, és ha létezik is, vagy „manuálisan” kell megkeresni, vagy a szimbolikus matematika eszköztárát kell felhasználni.

Ezért keressük meg a 4.5.1 egyenlet numerikus megoldását! A deriváltat helyettesítsük a 4.3 fejezetben már tanult módszerrel ***(Euler módszer)***:

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} + a \cdot y(t) = r \tag{4.5.3}$$

egy átrendezés után: $y(t+h) = (1 - a \cdot h) \cdot y(t) + h \cdot r$ (4.5.4)

A megoldás pedig ebből iteratívan számítható ki: t-t növeljük h-val t=0-tól kezdődően (lásd: ode_Euler.m):

$$\begin{aligned}
&y(h) = (1-ah)y(0) + hr = (1-ah)y_0 + hr \\
&y(2h) = (1-ah)y(h) + hr = (1-ah)^2 y_0 + (1-ah)hr + hr \\
&y(3h) = (1-ah)y(2h) + hr = (1-ah)^3 y_0 + \sum_{m=0}^{2} (1-ah)^m hr + hr
\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

...

A fenti módszer számítási hibája csökkenthető, ha az $y'(t) = f(t, y)$ alakra hozott egyenlet mindkét oldalát integráljuk:

$$y(t)\Big|_{tk}^{tk+1} = y\left(t_{k+1}\right) - y\left(t_k\right) = \int_{tk}^{tk+1} f(t, y)dt \tag{4.5.6}$$

így $y\left(t_{k+1}\right) = y\left(t_k\right) + \int_{tk}^{tk+1} f(t, y)dt$ (4.5.7)

ahol $y\left(t_0\right) = y_0$. Az integráláshoz alkalmazzuk a 4.5 fejezetben tanult trapéz módszert:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left\{ f\left(t_k, y_k\right) + f\left(t_{k+1}, y_{k+1}\right)\right\} \tag{4.5.8}$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet jobb oldalán szereplő y_{k+1} értéke t_k időpillanatban még nem ismert, ezért ezt közelítenünk kell:

$$y_{k+1} \cong y_k + h \cdot f\left(t_k, y_k\right) \tag{4.5.9}$$

amely behelyettesítésével 4.5.8 a következő alakot ölti:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left\{ f\left(t_k, y_k\right) + f\left(t_{k+1}, y_k + h \cdot f\left(t_k, y_k\right)\right)\right\} \tag{4.5.10}$$

Ezzel eljutottunk az ún. ***Heun módszerhez*** (lásd: ode_Heun.m)

Az először bemutatott Euler-módszer hibája O(h), a Heun-módszeré $O(h^2)$, amely a gyakorlati feladatoknál nem mindig kielégítő. Ha a fenti integrálást a trapéz helyett a Simpson formula segítségével végezzük (a levezetés mellőzésével):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(f_{k1} + 2 f_{k2} + 2 f_{k3} + f_{k4}\right) \tag{4.5.11}$$

ahol
$$\begin{aligned} f_{k1} &= f\left(t_k, y_k\right) \\ f_{k2} &= f\left(t_k + h/2, y_k + f_{k1} \cdot h/2\right) \\ f_{k3} &= f\left(t_k + h/2, y_k + f_{k2} \cdot h/2\right) \\ f_{k4} &= f\left(t_k + h, y_k + f_{k3} \cdot h\right) \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

eljutunk az ún. ***Runge-Kutta módszerhez*** (lásd: ode_RK4.m)**,** amely módszer hibája viszont már csak O(h^4)!

A következőkben térjünk át a technológiai folyamatmodellezésben leggyakrabban alkalmazott ún. ***Peremérték feladatok*** (angolul Boundary Value Problems, BVP) megoldására. A peremérték probléma megoldása a differenciálegyenlet azon megoldása, amely kielégíti a peremfeltételeket, így peremérték feladatok esetén adott:

- N-ed rendű differenciálegyenlet,
- kezdeti feltételek,
- peremfeltételek.

A megoldás legelterjedtebb útja az ún. ***véges differencia módszer*** (angolul Finite Difference Method, FDM), melynek lényege, hogy az időtartományt egy ráccsal ([t0, tf]) N részre kell felosztani, melyek mérete:

$$h = \left(t_f - t_0\right) / N \tag{4.5.12}$$

A deriváltakat a rácspontokban centrális formula segítségével számítjuk, amely így egy tridiagonális egyenletrendszerre vezet, melynek (N-1) db változója van:

$$\left\{x_i = x\left(t_0 + ih\right), i = 1, \ldots, N-1\right\} \tag{4.5.13}$$

Tekintsük a következő példát:

$$\begin{aligned} &x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = u(t) \\ &x\left(t_0\right) = x_0 \\ &x\left(t_f\right) = x_f \end{aligned}$$

Az imént ismertetett elv szerint, az időtartományt N részre osztjuk, és minden t_i pontban a centrális közelítést alkalmazzuk:

$$\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{h^2}+a_{1i}\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2h}+a_{0i}x_i=u_i$$

Átrendezve a következő alakot ölti:

$$\left(2-ha_{1i}\right)x_{i-1}+\left(-4+2h^2a_{0i}\right)x_i+\left(2+ha_{1i}\right)x_{i+1}=2h^2u_i$$

Az egyenletet írjuk át mátrixos formába, ahol vegyük figyelembe a peremfeltételeket is (lásd: bvp2_fdf.m és trid.m):

$$\begin{bmatrix} -4+2h^2a_{01} & 2+ha_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2-ha_{12} & -4+2h^2a_{02} & 2+ha_{12} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-ha_{13} & -4+2h^2a_{03} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -4+2h^2a_{0,N-3} & 2+ha_{1,N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-ha_{1,N-2} & -4+2h^2a_{0,N-2} & 2+ha_{1,N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2-ha_{1,N-1} & -4+2h^2a_{0,N-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{N-3} \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2h^2u_1-\left(2-ha_{11}\right)x_0 \\ 2h^2u_2 \\ 2h^2u_3 \\ \dots \\ 2h^2u_{N-3} \\ 2h^2u_{N-2} \\ 2h^2u_{N-1}-\left(2-ha_{1,N-1}\right)x_N \end{bmatrix}$$

Figyeljük meg az együttható mátrix felépítését!

A fentiekben csak a legegyszerűbb (általános) differenciál egyenletek megoldásával foglalkoztunk. A következőkben térjünk át az elektronikai technológiai folyamatmodellezés szempontjából sokkal lényegesebb ún. ***parciális differenciálegyenletek*** numerikus megoldására. A parciális differenciálegyenlet olyan differenciálegyenlet, amelyben egynél több független változó szerepel. A gyakorlatban leggyakrabban előforduló másodrendű egyenlet általános alakja a következő:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{4.5.14}$$

amelynek három altípusa különböztethető meg:

- elliptikus (pl. Poisson-egyenlet), ha B2-4AC<0
- parabolikus (pl. hővezetés), ha B2-4AC=0
- hiperbolikus (pl. rezgő húr), ha B2-4AC>0

Az algoritmizálható numerikus megoldás alapvetően attól függ, hogy az adott egyenlet a fent definiált három típus közül melyikbe tartozik. Így a következőkben vizsgáljuk meg az egyes típusokra rendelkezésre álló megoldási lehetőségeket, valós példákkal szemléltetve.

Elliptikus egyenletek megoldását szemléltessük az egyik legnevesebb képviselőjükkel az ún. Helmholtz-egyenlet segítségével:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+g(x,y)u(x,y)=f(x,y) \tag{4.5.15}$$

alkalmazzuk a következő határfeltételeket:

$$\begin{aligned} &u\left(x_0,y\right)=b_{x0}(y); \quad u\left(x_f,y\right)=b_{xf}(y) \\ &u\left(x,y_0\right)=b_{y0}(x); \quad u\left(x,y_f\right)=b_{yf}(x) \end{aligned} \tag{4.5.16}$$

A Helmholtz-egyenlet leggyakoribb alkalmazása a lézersugarak terjedésének vizsgálata, a membránok rezgés analízise, a stacionárius hővezetés stb... Megoldást végezzük a fent ismertetett véges differencia módszerrel. A vizsgált tartományt osszuk az x tengely mentén M_x, az y tengely mentén M_y darabra:

$$\Delta x=\left(x_f-x_0\right)/M_x; \quad \Delta y=\left(y_f-y_0\right)/M_y \tag{4.5.17}$$

Ezután a deriváltakat a 4.3 fejezetben tanult centrális formulával közelítjük:

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\right|_{x_j,y_i} \cong \frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\Delta x^2}$$
$$\left.\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right|_{x_j,y_i} \cong \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{\Delta y^2} \tag{4.5.18}$$

ahol $x_j = x_0 + j\Delta x; \quad y_i = y_0 + i\Delta y; \quad u_{i,j} = u\left(x_j, y_i\right)$ (4.5.19)

Így a 4.5.15 egyenlet numerikus formában a következő:

$$\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{\Delta y^2} + g_{i,j}u_{i,j} = f_{i,j} \tag{4.5.20}$$

A 4.5.20 egyenletrendszer megoldásához írjuk át a feladatot az alábbi alakba (a 4.5.15 egyenlet a tér felosztása miatt egyenletrendszerré alakult):

$$u_{i,j} = r_y\left(u_{i,j+1}+u_{i,j-1}\right) + r_x\left(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}\right) + r_{xy}\left(g_{i,j}u_{i,j} - f_{i,j}\right) \tag{4.5.21}$$

ahol $r_y = \dfrac{\Delta y^2}{2\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)}; \quad r_x = \dfrac{\Delta x^2}{2\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)}; \quad r_{xy} = \dfrac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)}$ (4.5.22)

az egyenletrendszer együtthatói, valamint (lásd: poisson.m):

$$u_{i,0} = b_{x0}\left(y_i\right); \quad u_{i,Mx} = b_{xf}\left(y_i\right); \quad u_{0,j} = b_{y0}\left(x_j\right); \quad u_{My,j} = b_{yf}\left(x_j\right) \tag{4.5.23}$$

Parabolikus egyenletek megoldását szemléltessük az 1D-s istacionárius hővezetés segítségével:

$$a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{4.5.24}$$

alkalmazzuk a következő határfeltételeket:

$$0 \le x \le x_f; \quad 0 \le t \le T; \quad a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \tag{4.5.25}$$

Mivel a parabolikus differenciálegyenlet a technológiai folyamatmodellezés során leggyakrabban előkerülő differenciálegyenlet típus, ezért a megoldását vizsgáljuk meg többféle módszer segítségével is. Először végezzük el a megoldást ***előrelépő explicit Euler formula*** segítségével. A helykoordináta szerinti deriváltat centrális, az idő szerintit előrelépő formulával közelítjük (lásd: heat_exp.m):

$$a\frac{u_{i+1}^{k}-2u_{i}^{k}+u_{i-1}^{k}}{\Delta x^{2}}=\frac{u_{i}^{k+1}-u_{i}^{k}}{\Delta t} \tag{4.5.26}$$

amelynek iteratív megoldása a következő:

$$u_{i}^{k+1}=r\left(u_{i+1}^{k}+u_{i-1}^{k}\right)+\left(1-2r\right)\cdot u_{i}^{k} \tag{4.5.27}$$

ahol $r=a\frac{\Delta t}{\Delta x^{2}};\quad (i=1,2,...M-1)$ (4.5.28)

A 4.5.26-os iteratív formula sajnos nem minden esetben stabil és konvergens. A stabilitás és konvergencia feltétele, hogy r≤1/2. Ennek megfelelően az előrelépő Euler formula alkalmazása során nagy hangsúlyt kell fektetni a tér és idő diszkretizálására (pl. ha a csökkentjük Δx-et, Δt-t is csökkenteni kell).

Most végezzük el a megoldást ***implicit hátralépő Euler formulával*** is. A helykoordináta szerinti deriváltat centrális, az idő szerintit hátralépő formulával közelítjük:

$$a\frac{u_{i+1}^{k}-2u_{i}^{k}+u_{i-1}^{k}}{\Delta x^{2}}=\frac{u_{i}^{k}-u_{i}^{k-1}}{\Delta t} \tag{4.5.29}$$

amelynek iteratív megoldása a következő (lásd: heat_imp.m):

$$-ru_{i-1}^{k}+(1+2r)u_{i}^{k}-ru_{i+1}^{k}=u_{i}^{k-1} \tag{4.5.30}$$

ahol $r=a\frac{\Delta t}{\Delta x^{2}};\quad (i=1,2,...M-1)$ (4.5.31)

Az implicit formula megoldása Dirichlet típusú határfeltételek esetén még nehézségmentes (u_0^k és u_M^k adottak):

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -r & 1+2r & -r & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+2r & -r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ u_3^k \\ \dots \\ u_{M-2}^k \\ u_{M-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{k-1} + ru_0^k \\ u_2^{k-1} \\ u_3^{k-1} \\ \dots \\ u_{M-2}^{k-1} \\ u_{M-1}^{k-1} + ru_M^k \end{bmatrix} \quad (4.5.32)$$

Neumann típusú határfeltétel esetén azonban a megoldás nem ilyen kézenfekvő. A megoldandó egyenletrendszert át kell alakítani. Legyen:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = b'(t) \to \frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2\Delta x} = b_0'(k) \quad (4.5.33)$$

4.5.33-at behelyettesítve 4.5.30-ba:

$$(1+2r)u_0^k - 2ru_1^k = u_0^k - 2rb'_0(k)\Delta x \quad (4.5.34)$$

Így a megoldás mátrixos alakban a következő:

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -2r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -r & 1+2r & -r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & -r & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 1+2r & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1+2r & -r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^k \\ u_1^k \\ u_2^k \\ \dots \\ \dots \\ u_{M-2}^k \\ u_{M-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^{k-1} - rb'_0(k)\Delta x \\ u_1^{k-1} \\ u_2^{k-1} \\ \dots \\ \dots \\ u_{M-2}^{k-1} \\ u_{M-1}^{k-1} + ru_M^k \end{bmatrix}$$

(4.5.35)

Az implicit hátralépő Euler formula előnye, hogy a stabilitás és konvergencia nem függ az együtthatóktól, azaz a tér és idő szerinti felbontástól, valamint hogy tridiagonális az együtthatómátrixa.

A megoldást végezzük el az ún. ***Crank-Nicholson módszerrel*** is, amelynek lényege, hogy idő szerint előre lépünk, de a lépés Δt/2 értékű. A hely szerinti deriváltat centrálisan formulával közelítjük, de az időlépés felezése miatt a k. és k+1. értékek átlagával számolunk:

$$\frac{a}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i+1}^{k}-2u_i^{k}+u_{i-1}^{k}}{\Delta x^2}\right)=\frac{u_i^{k+1}-u_i^{k}}{\Delta t} \tag{4.5.36}$$

a formula iteratív megoldása:

$$-ru_{i+1}^{k+1}+2(1+r)u_i^{k+1}-ru_{i-1}^{k+1}=ru_{i+1}^{k}+2(1-r)u_i^{k}+ru_{i-1}^{k} \tag{4.5.37}$$

ahol r a fentiekben definiáltakkal megegyező. A módszer előnye a stabilitás és konvergencia, hatékonyság, nagyobb pontosság és a határfeltételek rugalmas kezelése (lásd: heat_CN.m).

Végezetül vizsgáljunk meg egy speciális esetet, amikor 2D-ós hővezetési egyenlet:

$$a\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} \tag{4.5.38}$$

úgy oldjuk meg, hogy az egyenlet bal oldalán hárompontos centrális közelítést alkalmazunk az előzőhöz hasonlóan „feles” előrelépő időlépést használva:

$$a\left(\frac{u_{i,j+1}^{k}-2u_{i,j}^{k}+u_{i,j-1}^{k}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i+1,j}^{k+1}-2u_{i,j}^{k+1}+u_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta y^2}\right)=\frac{u_{i,j}^{k+1}-u_{i,j}^{k}}{\Delta t} \tag{4.5.39}$$

a következő lépésben pedig:

$$a\left(\frac{u_{i,j+1}^{k+1}-2u_{i,j}^{k+1}+u_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i+1,j}^{k}-2u_{i,j}^{k}+u_{i-1,j}^{k}}{\Delta y^2}\right)=\frac{u_{i,j}^{k+2}-u_{i,j}^{k+1}}{\Delta t} \tag{4.5.40}$$

Ez a módszer az ún. „Alternating Direction Implicit” (ADI) módszer, melynek iteratív megoldása (lásd: heat2_ADI.m):

$$-r_y\left(u_{i-1,j}^{k+1}+u_{i+1,j}^{k+1}\right)+\left(1+2r_y\right)\cdot u_{i,j}^{k+1}=r_x\left(u_{i,j-1}^{k}+u_{i,j+1}^{k}\right)+\left(1-2r_x\right)\cdot u_{i,j}^{k} \quad (4.5.41)$$

ha $1\le j\le M_x-1$ és

$$-r_x\left(u_{i,j-1}^{k+2}+u_{i,j+1}^{k+2}\right)+\left(1+2r_x\right)\cdot u_{i,j}^{k+2}=r_y\left(u_{i-1,j}^{k+1}+u_{i+1,j}^{k+1}\right)+\left(1-2r_y\right)\cdot u_{i,j}^{k+1} \quad (4.5.42)$$

ha $1\le i\le M_y-1$.

ahol $r_x=a\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2};\quad r_y=a\dfrac{\Delta t}{\Delta y^2}$ (4.5.43)

Hiperbolikus egyenletek megoldását szemléltessük az 1D-s hullámegyenlet segítségével:

$$A\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (4.5.44)$$

alkalmazzuk a következő határfeltételeket:

$$0\le x\le x_f;\quad 0\le t\le T \quad (4.5.45)$$

A megoldást végezzük explicit centrális formula segítségével, az egyenlet mindkét oldalán centrális közelítést alkalmazva:

$$A\frac{u_{i+1}^{k}-2u_i^{k}+u_{i-1}^{k}}{\Delta x^2}=\frac{u_i^{k+1}-2u_i^{k}+u_i^{k-1}}{\Delta t^2} \quad (4.5.46)$$

ahol $\Delta x=x_f/M;\quad \Delta t=T/N$ (4.5.47)

melynek iteratív megoldása:

$$u_i^{k+1}=r\left(u_{i+1}^{k}+u_{i-1}^{k}\right)+2(1-r)u_i^{k}-u_i^{k-1} \quad (4.5.48)$$

ahol $r=A\dfrac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$ (4.5.49)

Vegyük észre a problémát, hogy 4.5.48 felírásakor, az első lépésben, nem ismerjük $u_i^{-1} = u\left(x_i, -\Delta t\right)$ értékét! Megoldás, hogy közelítsük a kezdeti feltétel deriváltját a következő kifejezéssel:

$$\frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\Delta t} = i'_0\left(x_i\right) \tag{4.5.50}$$

majd ezt használjuk fel az u_i^{-1} „eltüntetésére” a 4.5.48 iteratív kifejezésből:

$$u_i^1 = r\left(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0\right) + 2(1-r)u_i^0 - \left(u_i^1 - 2i'_0\left(x_i\right)\Delta t\right) \tag{4.5.50}$$

Átrendezés után: $u_i^1 = \frac{1}{2} r\left(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0\right) + (1-r)u_i^0 + i'_0\left(x_i\right)\Delta t$ (4.5.51)

E két egyenletet használjuk arra, hogy a kezdeti feltételt (u_i^{-1}) megkapjuk, majd ezután a generál formulát (4.5.48-at) használhatjuk (wave.m). Jelen esetben a stabilitás feltétele, hogy r≤1, viszont lényeges, hogy a közelítés pontossága r értékével arányos! (r=1-et használunk a gyakorlatban).

A következőkben vizsgáljuk meg a 2D-s hullámegyenlet numerikus megoldását is:

$$A\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \tag{4.5.52}$$

Az egyenlet mindkét oldalán alkalmazzunk centrális közelítést:

$$A\left(\frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{\Delta y^2}\right) = \frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}}{\Delta t^2} \tag{4.5.53}$$

melynek iteratív megoldása:

$$u_{i,j}^{k+1} = r_x\left(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k\right) + 2(1 - r_x - r_y)u_{i,j}^k + r_y\left(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k\right) - u_{i,j}^{k-1} \tag{4.5.54}$$

ahol $r_x = A\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}; \quad r_y = A\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2}$ (4.5.55)

A fent tárgyalt probléma továbbra is fennáll, hogy az első lépésben nem ismerjük $u_{i,j}^{-1} = u\left(x_j, y_i - \Delta t\right)$ értékét! Megoldás, hogy közelítsük a kezdeti feltétel deriváltját a következő kifejezéssel:

$$\frac{u_{i,j}^{1} - u_{i,j}^{-1}}{2\Delta t} = i'_0\left(x_j, y_i\right) \tag{4.5.56}$$

majd ezt használjuk fel az u_i^{-1} „eltüntetésére” a 4.5.53 iteratív kifejezésből:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{1} &= \frac{1}{2}\left[r_x\left(u_{i,j+1}^{0} + u_{i,j-1}^{0}\right) + r_y\left(u_{i+1,j}^{0} + u_{i-1,j}^{0}\right)\right] + \\ &+2\left(1 - r_x - r_y\right)\cdot u_{i,j}^{0} + i'_0\left(x_j, y_i\right)\Delta t \end{aligned} \tag{4.5.57}$$

Ezt az egyenletet használjuk arra, hogy a kezdeti feltételt ($u_{i,j}^{-1}$) megkapjuk, majd ezután a generál formulát (4.5.53-at) használhatjuk (lásd: wave2.m).

A 4.5 fejezet végén vizsgáljuk meg, hogyan alakulnak a technológiai folyamatmodellezés szempontjából leglényegesebb elliptikus és parabolikus differenciálegyenletek numerikus megoldásai ***Neumann típusú határfeltételek*** alkalmazása esetén.

Először tekintsünk át az elliptikus Helmholtz-egyenlet (4.5.15) megoldását Neumann típusú határfeltétel esetén. A bal oldali határon legyen előírva a határfeltétel deriváltja:

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x0} = b'_{x0}(y) \tag{4.5.58}$$

A deriváltat közelítsük centrális formulával:

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2\Delta x} \approx b'_{x0}\left(y_i\right) \tag{4.5.59}$$

azaz $u_{i,-1} \approx u_{i,1} - 2b'_{x0}\left(y_i\right)\Delta x$ (4.5.60)

ahol (i=1,2,...,M_y-1).

Az eredményt írjuk be a rekurzív formulába:

$$\begin{aligned} u_{i,0} &= r_y\left(u_{i,1}+u_{i,-1}\right)+r_x\left(u_{i+1,0}+u_{i-1,0}\right)+r_{xy}\left(g_{i,0}u_{i,0}-f_{i,0}\right)= \\ &= r_y\left(u_{i,1}+u_{i,1}-2b'_{x0}\left(y_i\right)\Delta x\right)+r_x\left(u_{i+1,0}+u_{i-1,0}\right)+r_{xy}\left(g_{i,0}u_{i,0}-f_{i,0}\right)= \\ &= 2r_y u_{i,1}+r_x\left(u_{i+1,0}+u_{i-1,0}\right)+r_{xy}\left(g_{i,0}u_{i,0}-f_{i,0}-2b'_{x0}\left(y_i\right)/\Delta x\right) \end{aligned} \quad (4.5.61)$$

ahol (i=1,2,...,M_y-1). Ha emellett az alsó határon ($y=y_0$) is a derivált van előírva:

$$u_{0,j}=r_y\left(u_{0,j+1}+u_{0,j-1}\right)+2r_x u_{1,j}+r_{xy}\left(g_{0,j}u_{0,j}-f_{0,j}-2b'_{y0}\left(x_j\right)/\Delta y\right) \quad (4.5.62)$$

és ekkor a sarokpontra:

$$u_{0,0}=2\left(r_y u_{0,1}+r_x u_{1,0}\right)+r_{xy}\left(g_{0,0}u_{0,0}-f_{0,0}-2\left(b'_{x0}\left(y_0\right)/\Delta x+b'_{y0}\left(x_0\right)/\Delta y\right)\right) \quad (4.5.63)$$

Az alkalmazást lásd: poisson_neum.m.

Végezetül tekintsük a parabolikus 1D-s hővezetés egyenletének (4.5.15) megoldását Neumann típusú határfeltétel esetén. A bal oldali határon legyen előírva a határfeltétel deriváltja:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=b'(t) \quad (4.5.64)$$

A deriváltat közelítsük centrális formulával:

$$\frac{u_1^k-u_{-1}^k}{2\Delta x}=b_0'(k) \quad (4.5.65)$$

Ezt helyettesítsük be a fent ismertetett előrelépő explicit iteratív megoldásba (4.5.27):

$$-ru_{i-1}^k+(1+2r)u_0^k-ru_1^k=u_0^{k-1} \quad (4.5.66)$$

egy átrendezés után $(1+2r)u_0^k-2ru_1^k=u_0^k-2rb'_0(k)\Delta x$ (4.5.67)

4.5.67 segítségével fejtsük ki az egyenlet mátrixos alakját:

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -2r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -r & 1+2r & -r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & -r & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 1+2r & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1+2r & -r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^k \\ u_1^k \\ u_2^k \\ \dots \\ \dots \\ u_{M-2}^k \\ u_{M-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^{k-1} - rb'_0(k)\Delta x \\ u_1^{k-1} \\ u_2^{k-1} \\ \dots \\ \dots \\ u_{M-2}^{k-1} \\ u_{M-1}^{k-1} + ru_M^k \end{bmatrix} \tag{4.5.68}$$

Az alkalmazást lásd: heat_imp_neum.m.

Most vizsgáljuk meg, mi történik, ha a jobb oldali határon van előírva a határfeltétel deriváltja:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=xf} = b'(t) \tag{4.5.69}$$

A deriváltat közelítsük centrális formulával:

$$\frac{u_{M+1}^k - u_M^k}{2\Delta x} = b_M\,'(k) \tag{4.5.70}$$

A fentiekkel teljesen analóg módon eljárva, 4.5.70-et most helyettesítsük be a 4.5.37-es Crank-Nicolson formulába. A megoldás mátrixos alakja a következő oldalon látható. Az alkalmazást lásd: heat_CN_neum.m. Vizsgáljuk meg, milyen különbségek vannak a megoldásban a bal és a jobb oldalon előírt Neumann típusú határfeltétel esetén!

$$\begin{bmatrix} 2(1+r) & -r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -r & 2(1+r) & -r & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 2(1+r) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -r & 2(1+r) & -r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 2(1+r) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ u_3^{k+1} \\ \dots \\ u_{M-1}^{k+1} \\ u_M^{k+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1-r) & r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r & 2(1-r) & r & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r & 2(1-r) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & r & 2(1-r) & r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r & 2(1-r) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{k} \\ u_2^{k} \\ u_3^{k} \\ \dots \\ u_{M-1}^{k} \\ u_M^{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r\left(u_0^{k+1} + u_0^{k}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 2r\left(b'_M(k+1) + b'_M(k)\right) \end{bmatrix} \tag{4.5.70}$$

A 4.5. fejezet ellenőrző kérdései:

1. Mutassa be egyszerű differenciálegyenlet esetén az előrelépő Euler módszer alkalmazását!
2. Mutassa be a Heun módszert!
3. Mutassa be a Runge-Kutta eljárást!
4. Mutasson be egy peremérték feladat megoldást véges differencia módszerrel!
5. Definiálja a parciális differenciálegyenletek fogalmát!
6. Mutasson be egy elliptikus differenciálegyenlet megoldást!
7. Mutasson be egy parabolikus differenciálegyenlet megoldást!
8. Mutasson be egy hiperbolikus differenciálegyenlet megoldást!
9. Mutassa be a Crank-Nicolson módszert!
10. Milyen nehézségekbe ütközünk a hátralépő implicit Euler formula alkalmazásakor?
11. Hogyan kell átalakítani az iteratív megoldásainkat Neumann típusú határfeltétel alkalmazása esetén?

4.6. Differenciál egyenletek megoldása integrális módszerekkel

Az előző fejezetben a parciális differenciál egyenletek numerikus közelítését a véges differencia módszerével (FDM) végeztük. A megoldás előállítása során több nehézségbe is ütköztünk, mint például a Neumann típusú határfeltételek és a komplex geometriák nehézkes kezelése, vagy éppen a közelítő módszer esetleges instabilitása. A következőkben a parciális differenciál egyenletek megoldásának két újabb, az integráláson alapuló módszerével ismerkedünk meg, amely az ún. véges elem módszer (angolul Finite Element Method – FEM) és az ún. véges térfogat módszer (angolul Finite Volume Method – FVM).

A módszerek általános tárgyalása érdekében vezessük be a 3.3.1 fejezetben már ismertetett kontinuitási tétel általános alakját:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u(x,t)dV + \int_A f(u)\cdot \mathbf{n}\, dA - \int_V S(u,x,t)dV = 0 \qquad (4.6.1)$$

amelyet az általános kontinuitási tétel integrális alakjának is neveznek és amely kimondja, hogy egy adott V térfogatban az u(x,t) mennyiség megváltozása és a határokon (A) beáramló mennyiség f(u) egyenlő a V térfogatban keletkező mennyiséggel (S(u,x,t)). A fenti kifejezés bármely transzportjelenségre igaz. Fix térfogat esetén a 4.6.1-re elég általános feltételek mellett alkalmazható a Gauss tétel:

$$\int_V \nabla\cdot f\, dV = \int_A f\cdot \mathbf{n}\, dA \qquad (4.6.2)$$

Ahhoz, hogy megkapjuk az általános kontinuitási tétel egy könnyebben alkalmazható formáját:

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot f(u) - S\right) dV = 0 \qquad (4.6.3)$$

Ahhoz, hogy a 4.6.3. képlet bal oldala nullát adhasson – bármely térfogaton – az integrálnak nullának kell lennie, így:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot f(u) - S = 0 \tag{4.6.4}$$

Ezáltal eljutottunk a kontinuitás tétel ún. ***erős differenciális*** alakjához, amit az előzőekben a 3. fejezetben is alkalmaztunk. A kontinuitási tételnek egy további alternatív integrális formájához juthatunk, ha az ún. súlyozott maradványok módszerét alkalmazzuk. Szorozzuk meg a 4.6.4-et egy ω(x) súlyfüggvénnyel és integráljuk a V térfogaton:

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot f(u) - S \right) \omega(x) dV = 0 \tag{4.6.5}$$

Ha a 4.6.5 kielégít bármilyen súlyfüggvényt, akkor a 4.6.5 ekvivalens a differenciális alakú 4.6.4-el. Ha a 4.6.5-ön ismét alkalmazzuk a Gauss tételt:

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - S \right) \omega(x) - f(u) \cdot \nabla \omega(x) \right] dV + \int_A f \cdot \mathbf{n}\, \omega(x)\, dA = 0 \tag{4.6.6}$$

akkor a kontinuitási tétel ún. ***gyenge*** formájához jutunk.

A következőkben az integrális módszereket egy dimenziós skalármennyiség u(x,t) transzport leírásán keresztül mutatjuk be, amelyet értelmezzünk a következő tartományon: $\Omega = \left(x,t : 0 \le x \le 1; 0 \le t \le T \right)$. A konvekciós – diffúziós transzport egyenletet alkalmazzuk a következő formában:

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(au - b\frac{\partial u}{\partial x} \right) - ru = s \tag{4.6.7}$$

ahol L(u) egy szimpla lineáris differenciál operátor. Ismerjük fel, hogy a 4.6.7 egyszerűen megkapható a 4.6.4-ből a következő behelyettesítésekkel: $f(u) = au - \partial u / \partial x$ és $S(u) = s + ru$. A 4.6.7-es kifejezés abban az esetben lineáris, ha az a, b, r és s együtthatók csak x és t függvényei, és abban az esetben nem lineáris, ha bármelyik együttható u (a megoldás) függvénye.

A következőkben a deriválások és parciális deriválások egyszerűbb megjelentetése miatt használjuk az alábbi egyszerűsített leírásokat:

$$u_x(x) = \frac{du}{dx}(x); \quad u_t(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t); \quad u_{xx}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{4.6.8}$$

A fenti egyszerűsítésekkel a 4.6.7 a következő alakra hozható:

$$u_t + (au - bu_x)_x - ru = s \tag{4.6.9}$$

A következőkben bemutatásra kerülő integrális módszerek a megoldandó parciális differenciálegyenletet integrális alakra hozzák a diszkretizálás során. Például ha a vizsgált parciális differenciálegyenlet erős alakja a következő: $L(u) = s$ akkor az integrális alak:

$$\int_0^1 L(u)\omega(x)\,dx = \int_0^1 s\omega(x)\,dx \tag{4.6.10}$$

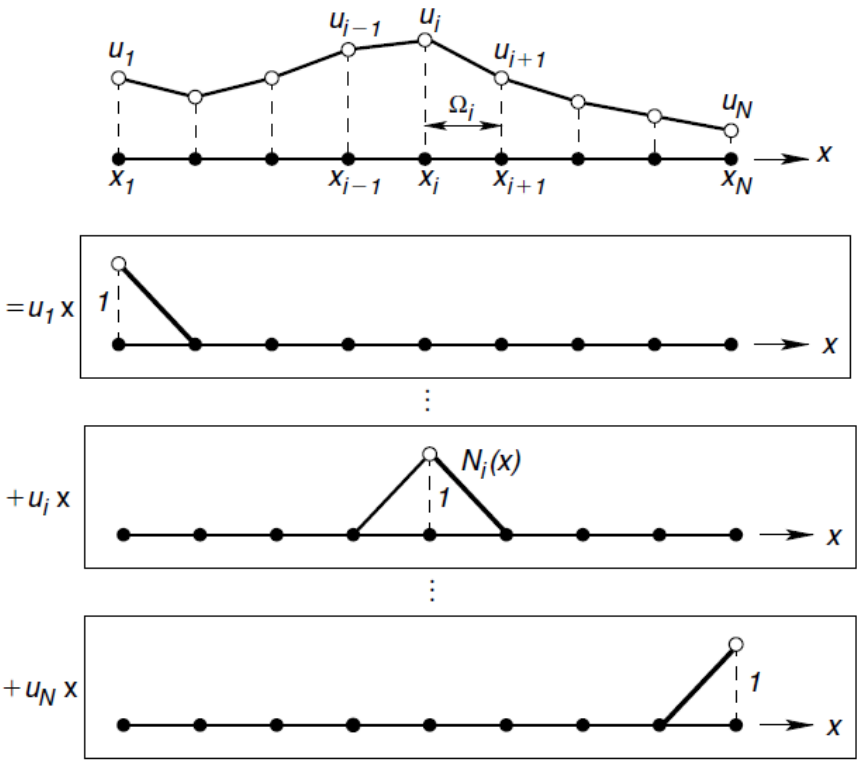
ahol a ω(x) súlyfüggvény megválasztása tetszőleges, az adott problémától függ.

4.6.1. Véges elem módszer (FEM)

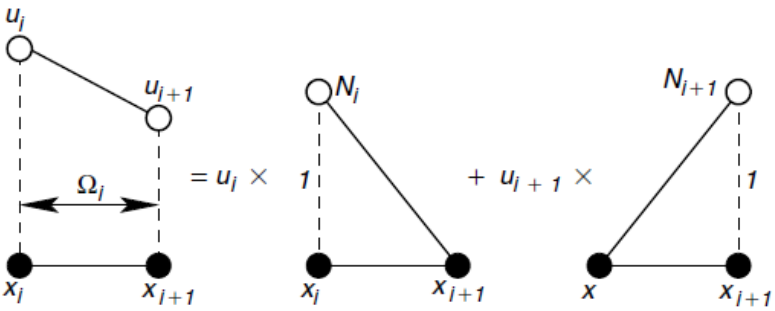
Első lépésben osszuk fel a fent definiált értelmezési tartományt $\Omega = \left(x : 0 \le x \le 1\right)$ N-1 részre, ahol a tér egy i-dik elem: $\Omega_i = \left(x : x_{i-1} 0 \le x \le x_i\right)$ és tekintsük a következő közelítő megoldást:

$$u^{\delta}(x,t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t) N_i(x) \tag{4.6.11}$$

ahol N_i(x)-k összessége az ún. kiterjesztett bázis. Számunkra N_i(x) azon pontjai érdekesek, ahol az értéke nem nulla, mivel a 4.6.11 kifejezés alapján u azon pontjaiban vett értékei vesznek részt a megoldásban. Ha ez a teljes értelmezési tartomány, akkor az ún. *spektrális módszerről* beszélhetünk. A következőkben alkalmazzunk olyan kiterjesztett bázisokat, amelyek szakaszosan folytonos polinomok minden egyes elemen belül (4.6.1 ábra).



4.6.1. ábra – Szakaszosan lineáris közelítés $u^{\delta}(x,t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t) N_i(x)$.



4.6.2. ábra – Véges elem kiterjesztett bázis.

Az $N_i(x)$ függvényeket szokás próba- vagy alakfüggvényeknek is nevezni, amelyek egy i elemen belül két további helyi tagra oszthatóak a 4.6.2-es ábra alapján.

A következőkben vizsgáljuk meg a legegyszerűbb ún. ***Galerkin FEM*** módszert. A 4.6.10-es kifejezésben szereplő súlyfüggvényt válasszuk olyanra, hogy az megegyezzen a bázisfüggvénnyel: $\omega(x) = N_i(x)$. Tekintsünk egy szimpla elliptikus parciális differenciálegyenletet: $L(u) = u_{xx} = s(x)$ a fent definiált Ω tartományban a következő határfeltételekkel: $u(0) = \alpha$ és $u_x(1) = g$, így a 4.6.10-es kifejezés a következő alakot ölti:

$$\int_0^1 \omega(x) u_{xx}\, dx = \int_0^1 \omega(x) s(x)\, dx \tag{4.6.12}$$

A bizonyítás mellőzésével célszerű, hogy a 4.6.12-es kifejezés bal oldalán álló határozott integrált elvégezzük, és ezzel a 4.6.12 kifejezést a 4.6.6 kifejezésben bemutatott *gyenge* formára hozzuk:

$$-\int_0^1 \omega_x u_x\, dx + \omega(1) u_x(1) - \omega(0) u_x(0) = \int_0^1 \omega(x) s(x)\, dx \tag{4.6.13}$$

Ez a FEM-ben egy általánosan alkalmazott technika, mivel csökkenti az u-val szembeni „simasági követelményt”, valamint szimmetrikus diszkretizált mátrixot eredményez. Két és három dimenzióban az ún. Gauss konvergencia tétel alkalmazásával érhetünk el hasonló eredményt.

A határfeltételek alkalmazásával máris megfigyelhetjük a FEM egy nagy előnyét az FDM-el szemben. A fent definiált Neumann határfeltétel ($u_x(1) = g$) alkalmazása teljesen kézenfekvő, csak szimplán helyettesítsük azt be a 4.6.13-ba, és láthatjuk, hogy továbbra is szimmetrikus mátrixokat kapunk (ellentétben az FDM-el). A fent definiált Dirichlet típusú határfeltétel ($u(0) = \alpha$) alkalmazása esetén helyettesítsünk be $u_1 = \alpha$-t, ahol szükséges, hogy $\omega(0) = 0$ legyen. (Általánosan Dirichlet határfeltétel esetén a súlyfüggvény mindig nulla.)

Alkalmazzuk a következő közelítést:

$$u(x) \approx u^{\delta}(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j N_j(x) \quad és \quad w(x) = N_i(x) \tag{4.6.14}$$

ekkor a 4.6.13 a következő alakot ölti:

$$-\int_0^1 \frac{dN_i}{dx}(x) \sum_{j=1}^{N} u_j \frac{dN_j}{dx}(x)\, dx = \int_0^1 N_i(x) s(x)\, dx \tag{4.6.15}$$

ahol i=1…N. A 4.6.15-ös kifejezés egy lineáris N-1 elemű egyenletrendszer N-1 ismeretlennel: $\left(u_2 ... u_N\right)$. Számoljuk ki az integrál értéket az i. elemre. A 4.6.1 ábrán szemléltetettek alapján a bázisfüggvényünk és a deriváltjainak értéke csak ott különbözik nullától, ahol az i-hez csatlakozó elem található a rendszerben, azaz:

$$N_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}; & x_{i-1} < x < x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{\Delta x_i}; & x_i < x < x_{i+1} \end{cases} \tag{4.6.16}$$

$$\frac{dN_i(x)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x_{i-1}}; & x_{i-1} < x < x_i \\ \dfrac{-1}{\Delta x_i}\ ; & x_i < x < x_{i+1} \end{cases} \tag{4.6.17}$$

ahol $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ és $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, ami alapján a 4.6.15-ben egyedül az integrálok különböznek nullától:

$$\begin{aligned} &-\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dN_i}{dx}\left(u_{i-1}\frac{dN_{i-1}}{dx} + u_i \frac{dN_i}{dx}\right) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dN_i}{dx}\left(u_i \frac{dN_i}{dx} + u_{i+1}\frac{dN_{i+1}}{dx}\right) dx = \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} N_i s\, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i s\, dx \end{aligned} \tag{4.6.18}$$

A 4.6.18 kifejezés jobb oldala a 4.6.16 és a 4.6.17 felhasználásával a következő alakra hozható:

$$F = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} s(x)\, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_i} s(x)\, dx \tag{4.6.19}$$

A korábban ismertetett trapézközelítést (4.4.5) alkalmazva a 4.6.19-es kifejezésre:

$$F = \left(\frac{\Delta x_{i-1}}{2} + \frac{\Delta x_i}{2} \right) s_i \tag{4.6.20}$$

A szükséges műveleteket elvégezve a 4.6.18 bal oldalán, valamint az imént kapott 4.6.20 kifejezést felhasználva eljutunk a fent definiált parciális differenciálegyenletünk ($L(u) = u_{xx} = s(x)$) diszkrét FEM alakjára:

$$-\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} + \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_i} = \frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{2} s_i \tag{4.6.21}$$

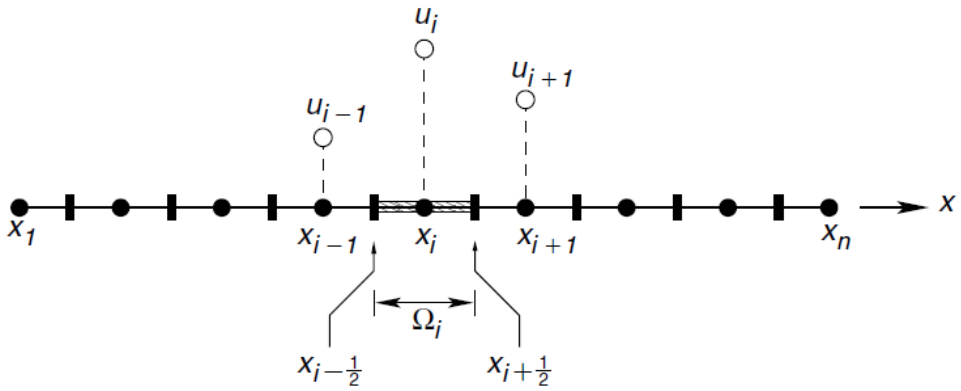
Vegyük észre, ha $\Delta x_{i-1} = \Delta x_i = \Delta x$, akkor a 4.6.21 a következő alakot ölti:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x} = \Delta x s_i \tag{4.6.22}$$

ami nem más, mint a már jól ismert véges differencia módszer másodrendű centrális formulája (4.3.29). Meg kell azonban jegyezni, hogy a FEM módszernél természetesen nem követelmény az egyenletes felosztás (sőt a FEM egyik fő előnye a komplex felosztások kezelése!). Továbbá lényeges, hogy az egyszerű – de ugyanakkor pontatlan – trapézközelítés helyett alkalmazható az összes fent ismertetett numerikus integrálási módszer is (pl. Simpson formula, Romberg, stb.)

4.6.2. Véges térfogat módszer (FVM)

Az FVM módszer működésének szemléltetése céljából alkalmazzuk ismét a korábban használt szimpla elliptikus parciális differenciálegyenletet: $L(u) = u_{xx} = s(x)$ a fent definiált $\Omega = \left(x : 0 \le x \le 1\right)$ tartományban, azzal a különbséggel, hogy most $\Omega_i = \left(x : x_{i-(1/2)} 0 \le x \le x_{i+(1/2)}\right)$. Definiáljuk a 4.6.3 ábrán látható módon és nevezzük „kontrol térfogatnak”.



4.6.3. ábra – Domain diszkretizáció

Az FVM integrális alakja a fent definiált elliptikus parciális differenciálegyenletnek a szintén fent definiált kontrol térfogaton:

$$\int_{x_{i-(1/2)}}^{x_{i+(1/2)}} u_{xx}\, dx = \int_{x_{i-(1/2)}}^{x_{i+(1/2)}} s\, dx \tag{4.6.23}$$

Végezzük el a bal oldali határozott integrált:

$$\int_{x_{i-(1/2)}}^{x_{i+(1/2)}} u_{xx}\, dx = u_x(x_{i+(1/2)}) - u_x(x_{i-(1/2)}) \tag{4.6.24}$$

A 4.6.24 kifejezést felhasználva, és a 4.6.23 jobb oldalát közelítve a téglalap szabállyal (4.4.3), a 4.6.23 a következő alakot ölti:

$$u_x(x_{i+(1/2)}) - u_x(x_{i-(1/2)}) = (x_{i+(1/2)} - x_{i-(1/2)})s_i \tag{4.6.25}$$

Tegyük fel, hogy u(x) lineáris függvény i és i-1 rácspontok között, akkor:

$$u_x\big|_{i-(1/2)} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}; \quad u_x\big|_{i+(1/2)} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{4.6.26}$$

Ha a 4.6.26-öt behelyettesítjük a 4.6.25-be, akkor megkapjuk a fenti szimpla elliptikus parciális differenciálegyenlet diszkrét FVM formuláját:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = (x_{i+(1/2)} - x_{i-(1/2)})s_i \tag{4.6.27}$$

Vegyük észre, hogy szimmetrikus felosztás esetén ($x_{i+(1/2)} = x_{i-(1/2)} = \Delta x$) ismét visszajutunk a már jól ismert véges differencia módszer másodrendű centrális formulájához (4.3.29 és 4.6.22).

Meg kell azonban jegyezni, ahogy a FEM-nél sem, úgy az FVM módszernél sem követelmény az egyenletes felosztás, az egyszerű – de ugyanakkor pontatlan – téglalapos közelítés helyett alkalmazható az összes fent ismertetett numerikus integrálsási módszer is (pl. Simpson formula, Romberg, stb.)

Végezetül összefoglalásként elmondható, hogy a fenti integrális módszerek nagy hasonlóságot mutatnak egymással, és ahogy láthattuk, bizonyos megkötések mellett a korábban ismertetett FDM-el is. A FEM és az FVM több szabadságot enged a nem egyenletesen felosztott rácsgeometriák kezelése terén (azonban meg kell jegyezni, hogy nem egyenletes rácsok az FDM módszerrel is kezelhetők). Tagadhatatlan azonban, hogy 2 és 3 dimenziós problémák esetén – az integrálás tulajdonságai miatt – a komplexebb rácsok kezelése a FEM és az FVM módszerek segítségével jóval könnyebb, mint az FDM módszerrel.

A 4.6. fejezet ellenőrző kérdései:

1. Mutassa be a kontinuitási tétel általános alakját!
2. Mutassa be a kontinuitási tétel erős és gyenge alakját!
3. Jellemezze a súlyfüggvény és a kiterjesztett bázis kapcsolatát FEM esetén!
4. Mutassa be a Galerkin FEM módszert!
5. Egy példán mutassa be, miért egyszerű a Neumann típusú határfeltételek alkalmazása FEM esetén!
6. Mutassa be a kapcsolatot a FEM és az FDM módszerek között!
7. Miben tér el a FEM és az FVM Domain diszkretizációja?
8. Egy példán mutassa be az FVM módszer működését!
9. Mutassa be a kapcsolatot az FVM és az FDM módszerek között!

4.7. Példák

A 4. főfejezet lezárásaként nézzünk konkrét példákat a fejezetben tanultak gyorsabb megértése és a tudás elmélyítése céljából. Minden példánál közöljük a megoldást is, azonban célszerű a megoldást személyesen is elvégezni!

P1. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss eliminációval és a változók kifejezésének módszerével is, és hasonlítsuk össze a végeredményt! (Kerekítsünk négy jegyre). Az egyenlet:

$$1.01x + 2y + 3z = 1$$
$$4x + 5y + 6z = 0$$
$$7x + 8y + 9z = 0$$

A Gauss eliminació végig vezetve a következő:

$$x + 1.9802y + 2.9703z = 0.9901$$

1. $0x - 2.9208y - 5.8812z = -3.9604$
   $0x - 5.8614y - 11.7921z = -6.9307$
   $x + 1.9802y + 2.9703z = 0.9901$
2. $0x + y + 2.0136z = 1.3559$
   $0x + 0y + 0.0104z = 1.0168$
   $x + 1.9802y + 2.9703z = 0.9901$
3. $0x + y + 2.0136z = 1.3559$
   $0x + 0y + z = 97.769$
   $x = 97.740$
4. $y = -195.512$
   $z = 97.769$

A változók kifejezésével a megoldás: $x = 100; \quad y = -200; \quad z = 100$.

Mi lehet az oka a viszonylag nagy eltérésnek? ***A kivonási jegyveszteség!***

P2. Alakítsuk a LSE eljárást RLSE eljárássá! Vegyük alapul a 4.1 fejezetben példaként használt hőmérsékletfüggő ellenállás esetét! Alkalmazzuk a következő MATLAB függvényt:

```
function [x,P]=rlse_online(aT_k1,b_k1,x,P)
%RLSE fuggvény
x=x+P*aT_k1'/(aT_k1*P*aT_k1'+1)*(b_k1-aT_k1*x);
P=P-P*aT_k1'/(aT_k1*P*aT_k1'+1)*aT_k1*P;
```

$$P_{k+1} = P_k - P_k a_{k+1}\left[a_{k+1}^T P_k a_{k+1} + 1\right]^{-1} a_{k+1}^T P_k \qquad x_{k+1} = x_k + P_{k+1} a_{k+1}\left(R_{k+1} - a_{k+1}^T x_k\right)$$

```
>>x0=[2 1]'; %a keresett állandók (mérési eredmény generáláshoz)
>>NA=length(x0); x=zeros(NA,1); %kezdetben nem tudunk semmit
>>P=100*eye(NA,NA); %minél nagyobb a P értéke, annál nagyobb korrekciót hajt végre
>>for k=1:100
A(k,:)=[k*0.01 1];
b(k,:)=A(k,:)*x0+0.2*rand;
[x,P]=rlse_online(A(k,:),b(k,:),x,P);
end;
```

A megoldás: 2.0058 és 1.0967

P3. Newton módszer segítségével oldjuk meg a következő nem lineárisegyenlet rendszert:

$$x_1^2 + 4x_2^2 = 5$$
$$2x_1^2 - 2x_1 - 3x_2 = 2,5$$

A megoldás:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 5 = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1 - 3x_2 - 2.5 = 0$$

Alkalmazzuk a következő MATLAB függvényt:

```
function y=f_proba(x)
y(1)=x(1)*x(1)+4*x(2)*x(2)-5;
y(2)=2*x(1)*x(1)-2*x(1)-3*x(2)-2.5;
```

>> x=newtons('f_proba',[0.8 0.2])

A megoldás: 2 és 0.5

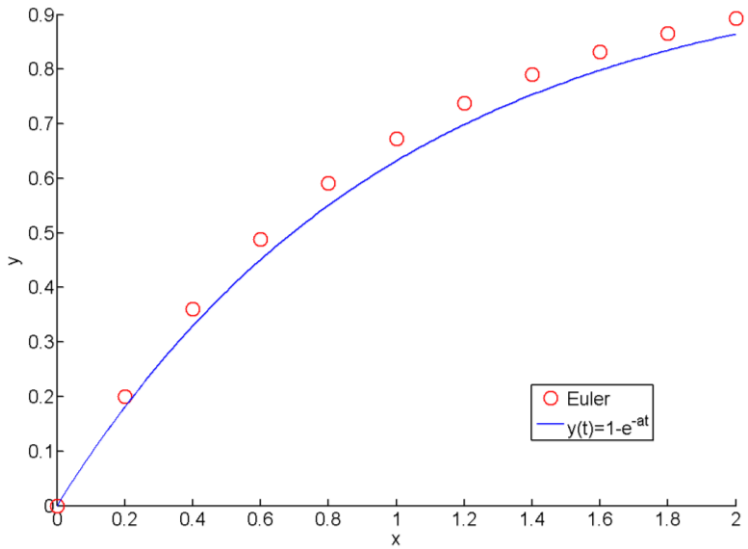
P4. Oldjuk meg a következő egyszerű differenciálegyenletet a MATLAB ode_Euler függvénye segítségével:

$$y'(t) + y(t) = 1$$

A megoldás:

```
>> f=inline('-y+1','t','y');
>> [t1,y1]=ode_Euler(f,[0 2],0,20);
>> plot([0:0.2:2],y1,'ro');
>> hold;
>>yt=1-exp(-1*([0:0.01:2]));
>> plot([0:0.01:2],yt);
```

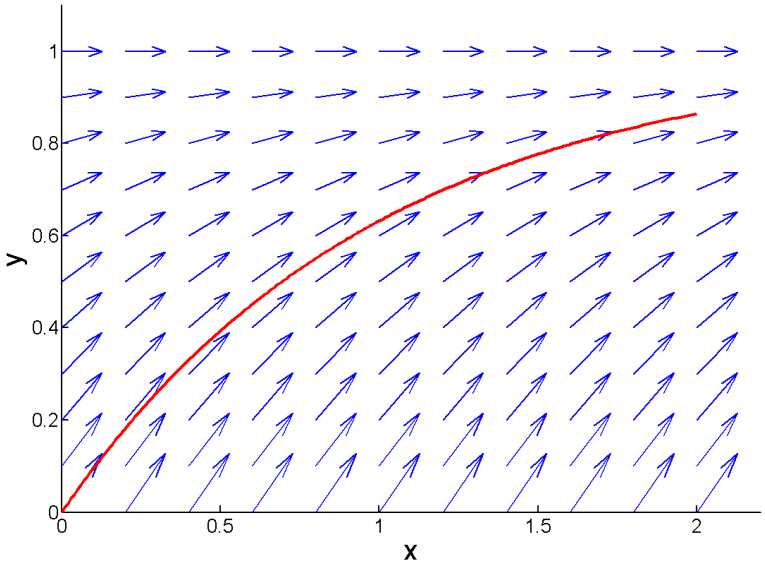
A grafikus megoldás:



A megoldás szemléletesebb módja lehet bizonyos esetekben, ha fázisdiagrammal ábrázoljuk azt:

```
>> [t,y]=meshgrid(0:0.2:2,0:0.1:1);
>> pt=ones(size(t));
>> py=(1-y).*pt; %dy=(1-y)dt;
>> quiver(t,y,pt,py);
>> hold;
>> plot([0:0.01:2],yt,'r');
```

A grafikus megoldás fázisdiagrammal:

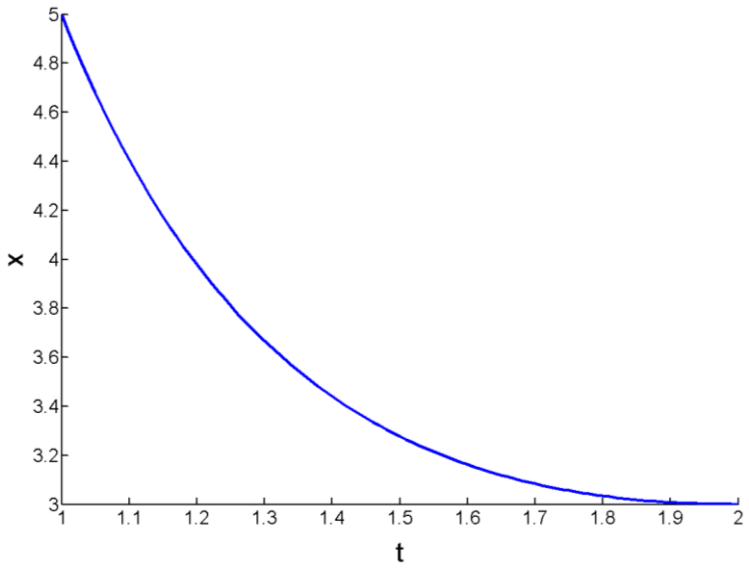


P5. Oldjuk meg a következő peremérték feladatot a MATLAB bvp2_fdf függvénye segítségével:

$x''(t)+\frac{2}{t}x'(t)-\frac{2}{t^2}x(t)=0$; Legyen x(1)=5, x(2)=3.

```
>> a1=inline('2./t','t');
>> a0=inline('-2./t./t','t');
>> [tt,x]=bvp2_fdf(a1,a0,0,1,2,5,3,100);  %(a1,a0,u,t0,tf,x0,xf,N)
>> plot(tt,x);
```

A grafikus megoldás:



P6. Oldjuk meg a stacioner hővezetés egyenletét a Poisson.m MATLAB függvény segítségével. A megoldandó egyenlet:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

alkalmazzuk a következő határfeltételeket:

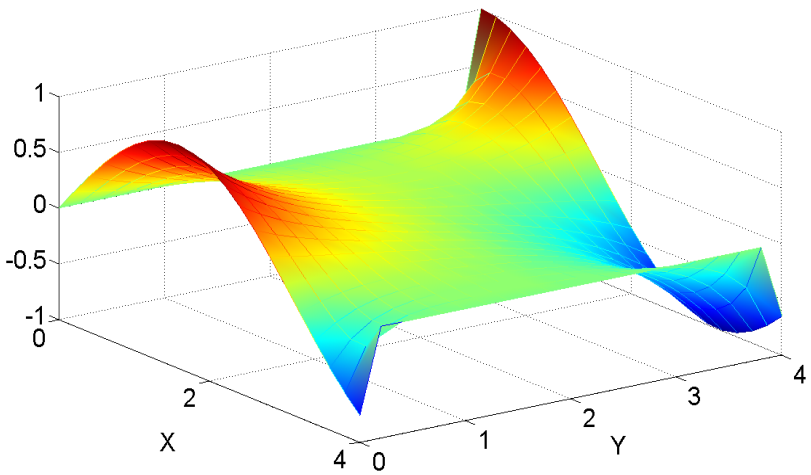
$$u(x,0) = \sin x; \quad u(0,y) = 0$$
$$u(x,4) = \cos x; \quad u(4,y) = 0$$

A megoldás menete:

```
>> f=inline('0','x','y'); g=inline('0','x','y');
>> bx0=inline('0','y');
>> bxf=inline('0','y');
>> by0=inline('sin(x)','x');
>> byf=inline('cos(x)','x');
>> D=[0 4 0 4];
```

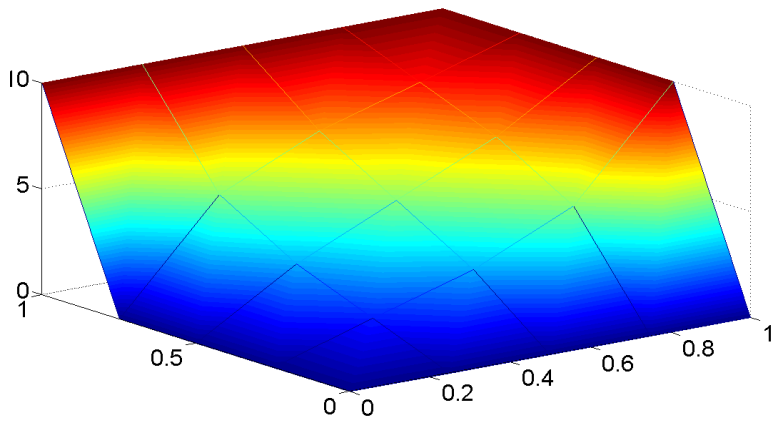
```
>> [U,x,y]=poisson(f,g,bx0,bxf,by0,byf,D,20,20,1e-4,500);
>> mesh(x,y,U)
```

A grafikus megoldás:



Nézzük meg a megoldás folyamatát hőterjedés esetén, ha a fenti határfeltételek helyett a határokon állandó hőmérséklet van.

A grafikus megoldás:



P7. Oldjuk meg az istacioner hővezetés egyenletét a Heat_exp.m (előrelépő explicit Euler módszer) MATLAB függvény segítségével. A megoldandó egyenlet:

$$a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\text{; ahol } a=\frac{\lambda}{\rho\cdot c}=0.1.$$

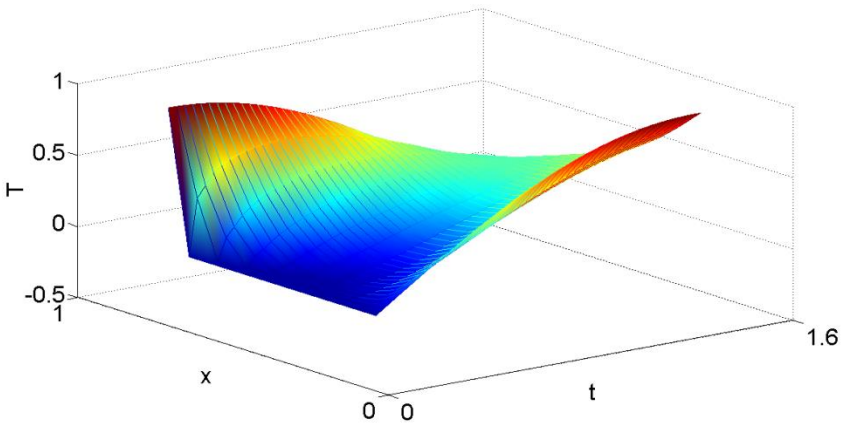
alkalmazzuk a következő határfeltételeket:

$$0\le x\le x_f=1;\quad 0\le t\le T=1.6$$
$$u(0,t)=\sin t;\quad u(1,t)=\cos t$$

A megoldás menete:

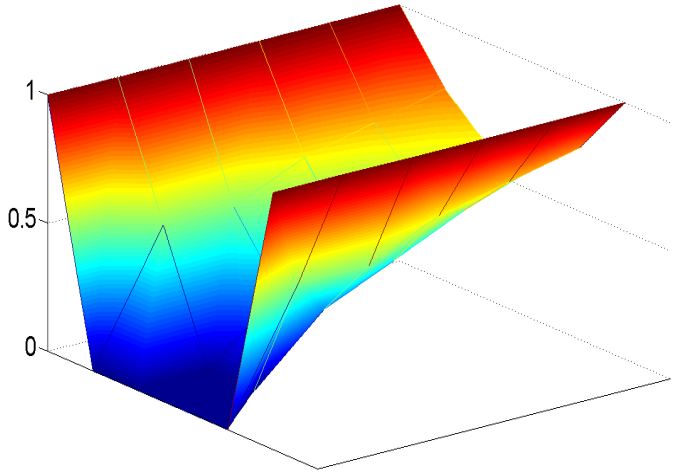
```
>> it0=inline('0','x');
>> bx0=inline('sin(t)','t');
>> bxf=inline('cos(t)','t');
>> [u,x,t]=heat_exp(0.1,1,1.6,it0,bx0,bxf,10,5);
>> mesh(u)
```

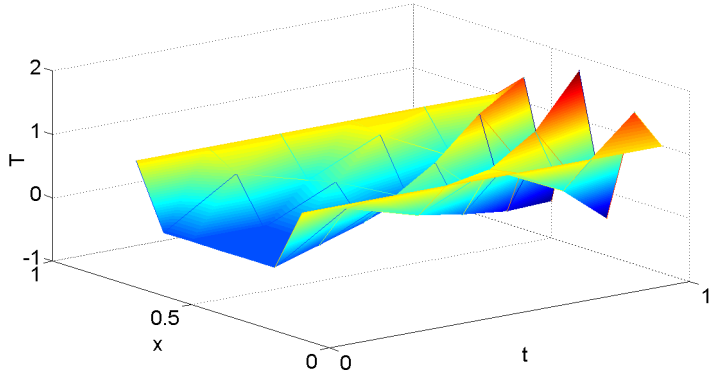
A grafikus megoldás:



Nézzük meg a megoldást egy rúd esetén, amelynek két végét állandó hőmérsékleten tartjuk (Felső ábra), valamint próbáljuk ki, mi történik, ha úgy növeljük a számítás pontosságát, hogy csak a térbeli felbontást finomítjuk (Δx-et), de az időbelit (Δt-t) nem (alsó ábra). Az alsó ábrán látható, hogy megsértjük a stabilitási feltételt (r≤1/2), és ezáltal helytelen eredményre jutunk.

A grafikus megoldások:





P8. Oldjuk meg az istacioner 1D-s hővezetés egyenletét az imp.m (hátralépő implicit Euler módszer) MATLAB függvény segítségével. A megoldandó egyenlet:

$$a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\text{; ahol } a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} = 0.1.$$

alkalmazzuk a következő határfeltételeket:

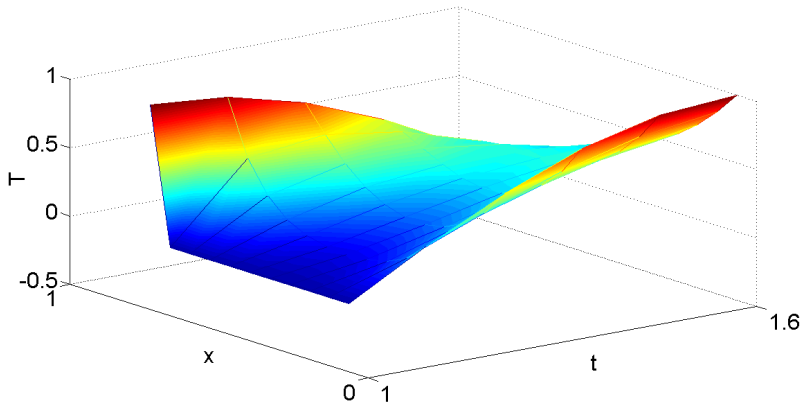
$$0 \le x \le x_f = 1; \quad 0 \le t \le T = 1.6$$

$$u(0,t) = \sin t; \quad u(1,t) = \cos t$$

A megoldás menete:

```
>> it0=inline('0','x');
>> bx0=inline('sin(t)','t');
>> bxf=inline('cos(t)','t');
>> [u,x,t]=heat_imp(0.1,1,1.6,it0,bx0,bxf,5,5);
>> mesh(u)
```

A grafikus megoldás:



A megoldás természetesen megegyezik a P5 példában kapott megoldással, a különbség viszont az, hogy a hátralépő implicit Euler módszert alkalmazó imp.m függvénnyel a fenti megoldást akár egy iterációs lépésben is megkapjuk és a módszer mindig stabil, azaz akármeddig finomíthatjuk a Δx térbeli felosztást Δt időbeli felosztás változatlanul hagyása mellett!

P9. Oldjuk meg az istacioner 1D-s hővezetés egyenletét a CN.m (Crank-Nicolson módszer) MATLAB függvény segítségével. A megoldandó egyenlet:

$$a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\text{; ahol } a=\frac{\lambda}{\rho\cdot c}=0.1.$$

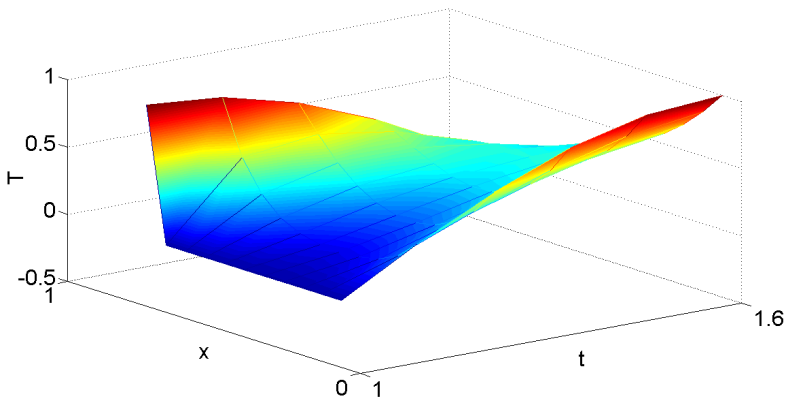
alkalmazzuk a következő határfeltételeket:

$$0 \le x \le x_f = 1; \quad 0 \le t \le T = 1.6$$
$$u(0,t) = \sin t; \quad u(1,t) = \cos t$$

A megoldás menete:

```
>> it0=inline('0','x');
>> bx0=inline('sin(t)','t');
>> bxf=inline('cos(t)','t');
>> [u,x,t]=heat_CN(0.1,1,1.6,it0,bx0,bxf,5,5);
>> mesh(u)
```

A grafikus megoldás:



A megoldás természetesen itt is megegyezik a P5 és P6 feladatokban kapottakkal. A különbség az, hogy ha összehasonlítjuk az imp.m és a CN.m működését, láthatjuk, hogy a CN.m sokkal egyszerűbb! Ezenfelül, még az implicit módszer előnyös stabilitási tulajdonságával is rendelkezik!

P10. Oldjuk meg az istacioner 2D-s hővezetés egyenletét az ADI.m (Alternating Direction Implicit módszer) MATLAB függvény segítségével. A megoldandó egyenlet:

$$a\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}; \text{ ahol } a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} = 0.1.$$

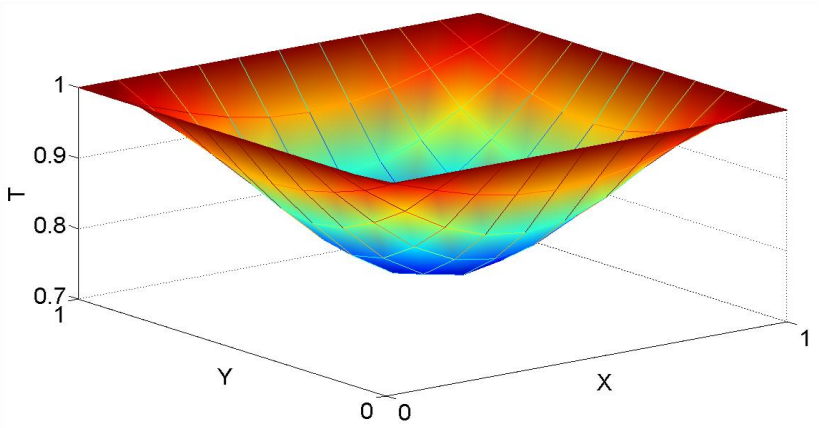
alkalmazzuk a következő határfeltételeket:

$$u\left(x_0, y, t\right) = b_{x0}(y,t) = 1; \quad u\left(x_f, y, t\right) = b_{xf}(y,t) = 1; \quad 0 \le t \le T = 1$$
$$u\left(x, y_0, t\right) = b_{y0}(x,t) = 1; \quad u\left(x, y_f, t\right) = b_{yf}(x,t) = 1$$

A megoldás menete:

```
>> it0 = inline('0','x','y');
>> bxyt = inline('1','x','y','t');
>> [u,x,y,t] = heat2_ADI(0.1,[0 1 0 1],1,it0,bxyt,10,10,10);
>> mesh(x,y,u);
```

A grafikus megoldás:



P11. Oldjuk meg a két végén befogott rezgő húr egyenletét Wave.m (explicit centrális formula) MATLAB függvény segítségével. A megoldandó egyenlet:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

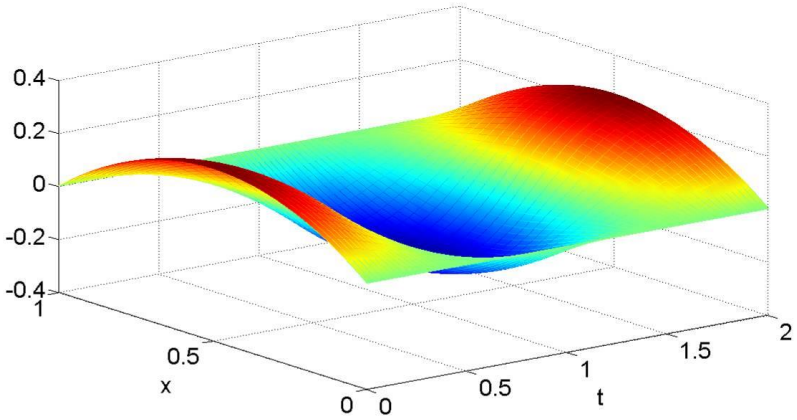
alkalmazzuk a következő határfeltételeket:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0; \quad u(x,0) = x - x^2; \quad 0 \le t \le T = 2$$
$$u(1,t) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad 0 \le x \le 1$$

A megoldás menete:

```
>> it0 = inline('x.*(1-x)','x');
>> i1t0 = inline('0');
>> bx0t = inline('0');
>> bxft = inline('0');
>> [u,x,t] = wave(1,1,2,it0,i1t0,bx0t,bxft,30,70);
>> mesh(t,x,u)
```

A grafikus megoldás:



P12. Oldjuk meg a befogott rezgő membrán egyenletét wave2.m (explicit centrális formula) MATLAB függvény segítségével. A megoldandó egyenlet:

$$A\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}\text{; ahol } A=0.25.$$

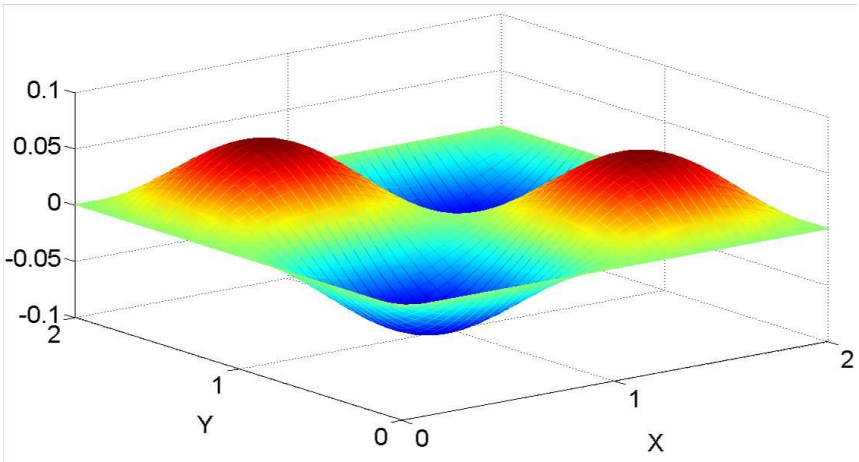
alkalmazzuk a következő határfeltételeket:

$$\partial u/\partial t\,(x,y,0)=0;\quad u(x,y,0)=0.1\sin(\pi x)\sin\left(\pi y\right)$$
$$u(0,y,t)=0;\quad u(x,0,t)=0;\quad u(2,y,t)=0;\quad u(x,2,t)=0$$
$$0\le x\le 2;\quad 0\le y\le 2;\quad 0\le t\le T=1$$

A megoldás menete:

```
>> it0 = inline('0.1*sin(pi*x)*sin(pi*y)','x','y');
>> i1t0 = inline('0','x','y');
>> bxyt = inline('0','x','y','t');
>> [u,x,y,t] = wave2(0.25,D,1,it0,i1t0,bxyt,40,40,100);
>> mesh(x,y,u)
```

A grafikus megoldás:



P13. Oldjuk meg a P4 példát (stacioner hővezetés egyenletét a Poisson.m MATLAB függvény segítségével), Neumann típusú határfeltételek esetére. A megoldandó egyenlet:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

alkalmazzuk a következő határfeltételeket:

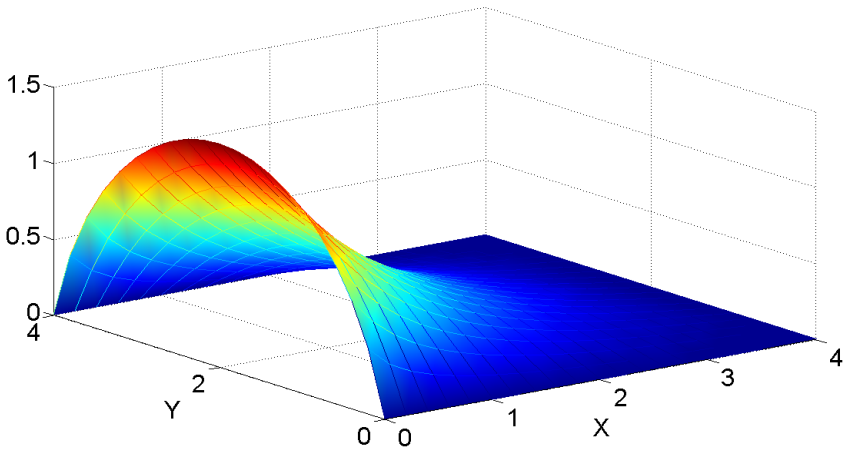
$$u(x,0) = 0; \quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x0} = -1$$

$$u(x,4) = 0; \quad u(4,y) = 0$$

Az eredeti megoldás kiegészítése:

```
%a mag:
for itr=1:MaxIter
   %neumann határfeltétel:
   for i=2:My
      u(i,1)=2*ry*u(i,2)+rx*(u(i+1,1)+u(i-1,1))...
          +rxy*(G(i,1)*u(i,1)-F(i,1)-2*bx0d(y(i))/dx);
   end;
```

A grafikus megoldás:



Hasonlítsuk össze a fenti megoldást a P4 feladatban kapott eredményekkel! A teljes algoritmust lásd: lásd: poisson_neum.m fileban.

P14. Oldjuk meg a stacioner hővezetés egyenletét a Heat_imp.m MATLAB függvény segítségével, Neumann típusú határfeltételek esetére. A megoldandó egyenlet:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$$

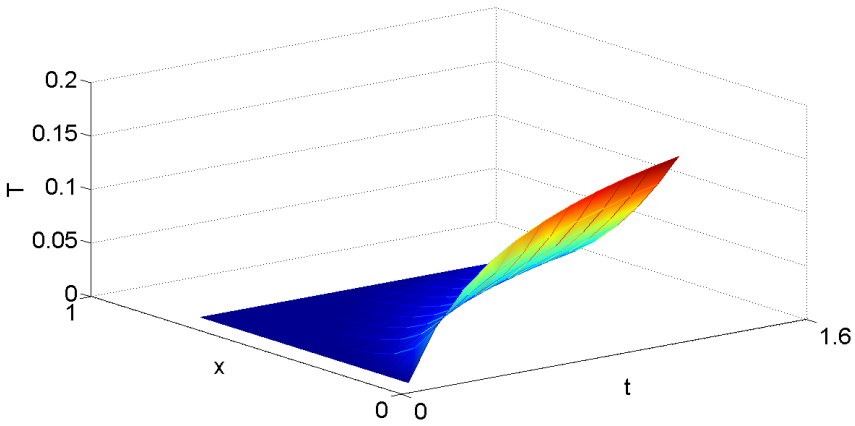
alkalmazzuk a következő határfeltételeket:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = b'(t) = -1$$

Az eredeti megoldás kiegészítése:

```
for k = 2:N + 1
   b = [u(1,k-1)-r*bx0dt(k)*dx; zeros(M - 2,1); ...
         u(M,k-1)+r*u(M + 1,k)] + u(1:M,k - 1);
   u(1:M,k) = trid(A,b);
end;
```

A grafikus megoldás:



A teljes algoritmust lásd: heat_imp_neum.m

P15. Oldjuk meg a stacioner hővezetés egyenletét a heat_CN.m MATLAB függvény segítségével, Neumann típusú határfeltételek esetére. A megoldandó egyenlet:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

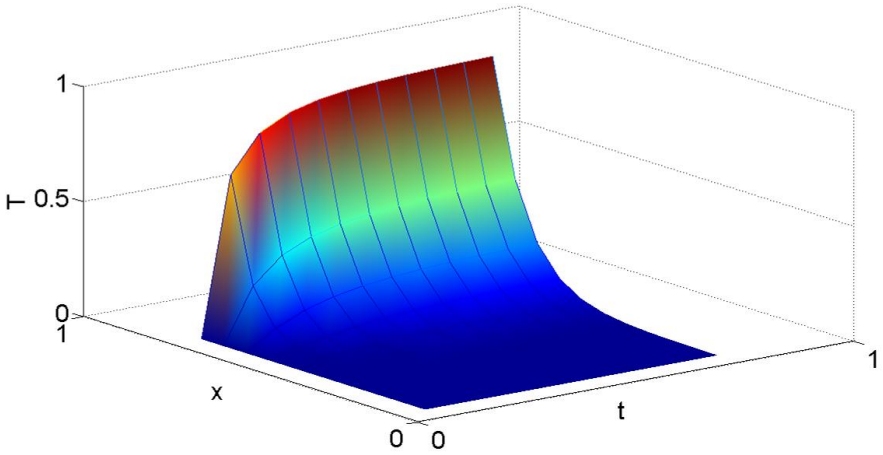
alkalmazzuk a következő határfeltételeket:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=xf} = b'(t) = 1$$

Az eredeti megoldás kiegészítése:

```
for k = 2:N + 1
   b = [r*u(1,k); zeros(M - 2,1); 2*r*bxfdt(k)] +...     r*(u(1:M,k - 1) + u(2:M +
1,k - 1)) +...     r1*u(2:M+1,k - 1);
   u(2:M+1,k) = trid(A,b);
end;
```

A grafikus megoldás:



A teljes algoritmust lásd: lásd: heat_CN_neum.m.

5. Ajánlott irodalom

1. Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai, Műegyetemi Kiadó, 2004
2. B. P. Zeigler, Tag Gon Kim Herbert Praehofer: Theory of modelling and simulation, Academic Press, 2000 (second edition)
3. W. Y. Yang, W. Cao, T.-S. Chung, J. Morris: Applied Numerical Methods Using MATLAB, Wiley, 2005
4. Stanley J. Farlow: Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Dover, 1982
5. D. S. Burnett: Finite element analysis, Addison-Wesley, 1988
6. S. K. Langer (1953), Feeling and Form: a theory of art developed from Philosophy in a New Key p. 90: "Sculptural form is a powerful abstraction from actual objects and the three-dimensional space which we construe through touch and sight."
7. T. Hughes, The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Dover Publishers, 2000.
8. J. Peiró ,S. Sherwin, Finite Difference, Finite Element and Finite Volume Methods for Partial Differential Equations, Handbook of FVM, London, UK